ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

GROUPE DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE T.S.F.

79, Boulevard Haussmann, 79

PARIS

REVUE TRIMESTRIELLE

TOME XII. OCTOBRE 1957. N° 50.

Tome XII Octobre 1957 N° 50

ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

GROUPE DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE T. S. F.

COMPAGNIES FRANÇAISES

COMPAGNIE GÉNÉRALE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL (CSF)
RADIO-FRANCE (RF)
RADIO-ORIENT (RO)
COMPAGNIE RADIO-MARITIME (CRM)
COMPAGNIE D'APPLICATIONS MÉCANIQUES A L'ÉLECTRONIQUE,
AU CINÉMA ET A L'ATOMISTIQUE (CAMECA)
SOCIÉTÉ DE TRAITEMENTS ÉLECTROLYTIQUES ET ÉLECTROTHERMIQUES (STEL)
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE-AFRIQUE (SFRA)
SOCIÉTÉ ANONYME LE CONDENSATEUR CÉRAMIQUE (LCC)
COMPAGNIE INDUSTRIELLE DES MÉTAUX ÉLECTRONIQUES (CIME)
COMPAGNIE INDUSTRIELLE DES CÉRAMIQUES ÉLECTRONIQUES (CICE)

79, Boulevard Haussmann, PARIS

SOMMAIRE

Rédacteur scientifique : M. Jean BERNIER

Abonnements : France : 3.500 F — Étranger : 5.000 F — Le numéro : 1.500 F.

Prière d'adresser toute correspondance à la Compagnie Générale de T. S. F., Centre d'Information et de Documentation, 12, rue Carducci, Paris (19e).

PERFORMANCES D'UN RADAR DIVERSITÉ [1]

PAR S. HERSCOVICI ET A. DETAPE,
Département « Radar »
du Centre de Recherches Techniques de la Compagnie Générale de T. S. F.

SOMMAIRE. — *Bien que la méthode diversité ne soit pas neuve, son application à la technique radar est récente. Elle a permis d'apporter des améliorations importantes en ce qui concerne la portée maximum et la continuité de détection notamment. Ces améliorations peuvent être calculées en tenant compte de tous les éléments susceptibles de dégrader l'information reçue, dans le cours de sa transmission. Les calculs de probabilité permettent donc d'obtenir la totalité d'information à la sortie d'un récepteur ou d'un circuit combinateur à plusieurs voies, et la méthode de Ross a paru la plus adéquate pour calculer l'incidence des caractéristiques de l'indicateur panoramique et du comportement de l'opérateur sur l'information utilisée.* (C. D. U. : 621.396.962.)

SUMMARY. — *Although the diversity method is not new, its application to radar is of recent date. It has brought about important improvements in maximum range and, in particular, to the continuity of detection.*
These improvements can be calculated, taking into account all elements liable to degrade the received information in the course of its transmission. Probability calculations enable the whole of the information at the output of a receiver or of a multi-channel combiner circuit to be obtained, and Ross's method has been thought the most adequate for calculating the influence of the characteristics of the P. P. I. display and of the consequential actions of the operator on the data used. (U. D. C. : 621.396.962.)

I. INTRODUCTION.

Le besoin d'accroître les performances des émetteurs-récepteurs de radars se manifeste de plus en plus. En ce qui concerne les radars de veille, notamment, les efforts tendent à augmenter la couverture des stations et à améliorer la régularité de détection, compromise par la fluctuation des échos. En effet, les différents pays s'efforcent d'obtenir une couverture totale de leur territoire et le contrôle d'espaces éloignés au maximum de leurs frontières; il est désirable pour y parvenir avec la meilleure efficacité de disposer d'un petit nombre seulement de radars à très longue portée. Or les grandes portées sur bombardiers et même sur chasseurs en visibilité directe sont devenues théoriquement possibles avec l'accroissement progressif de l'altitude des appareils modernes, à plus forte raison en ce qui concerne les engins téléguidés.

Plusieurs moyens concourent à améliorer les performances d'un radar :

1° L'augmentation du rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ à l'entrée du récepteur, notamment en diminuant les pertes de conversion de la première détection par l'utilisation de détecteurs plus efficaces et en faisant usage de lampes préamplificatrices à plus faible bruit. Mais les progrès deviennent de plus en plus difficiles de ce côté, à moins qu'on ne puisse un jour s'écarter des moyens classiques.

2° L'augmentation de la puissance moyenne des émetteurs, c'est-à-dire l'augmentation de la puissance de crête, de la durée et de la fréquence de répétition des impulsions. Cette dernière est de toute

---

[1] Manuscrit reçu le 23 juillet 1957.

façon limitée car sa période de récurrence doit toujours excéder la durée de transmission à la portée limite. Or les deux premières solutions présentent des inconvénients : la puissance de crête est limitée notamment par les possibilités de transmission dans les guides ultra-haute fréquence et conduit à un émetteur de prix de revient très élevé, avec des tensions très importantes et de grandes servitudes technologiques, qui font douter de la possibilité d'une exploitation militaire sûre.

La durée d'impulsion est elle-même actuellement limitée par des considérations technologiques aux environs de 5 μs et ne saurait de toute façon être allongée très au-delà afin de ne pas trop diminuer la précision en distance.

On est donc conduit à une autre solution qui consiste à utiliser la puissance de signaux provenant de plusieurs émetteurs-récepteurs utilisant la même antenne, en combinant ces signaux de façon adéquate avant de les présenter sur l'indicateur panoramique. On a appelé ce procédé, radar diversité, par analogie avec un système bien connu depuis de longues années en radiocommunications et qui a un regain d'actualité avec les essais actuels de transmission troposphérique sur des longueurs d'onde ultra-courtes : il a, en outre, le grand avantage d'atténuer fortement l'amplitude du fading à la réception.

Il est bien entendu que ce résultat ne peut être acquis que si les fréquences des émetteurs composants sont suffisamment différentes les unes des autres : on a donc affaire à une « diversité de fréquence » qu'il ne faut pas confondre avec la « diversité de glissement de fréquence » et la « diversité spatiale » à antennes décalées, utilisées de façon classique.

La combinaison des signaux la plus utilisée a été jusqu'à ces dernières années, la sélection automatique du plus fort signal par un ensemble de diodes commutatrices ou tout autre système, mais plusieurs auteurs ont indiqué depuis lors des arrangements plus avantageux, notamment en pondérant les signaux suivant le rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ moyen de chaque voie avant de les additionner [1], [2], [3] : On remarquera qu'un des avantages de la diversité spatiale était de permettre d'effectuer les opérations sur les signaux avant la détection d'enveloppe et après les avoir remis en phase les uns relativement aux autres, ce qui est impossible avec la diversité de fréquence qui permet seulement des opérations en vidéo fréquence.

En résumé, on peut escompter d'un radar en diversité de fréquence une diminution du rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ minimum par comparaison avec le radar unique, entraînant une augmentation de portée notable, et une diminution très appréciable de la fluctuation des échos reçus, donc une meilleure stabilité de détection. C'est précisément l'objet de cette étude de calculer le gain apporté dans ces deux domaines et d'apprécier les avantages de diverses combinaisons dans des conditions différentes.

Il ne faut cependant pas oublier de signaler les possibilités d'antibrouillage dues à l'usage de trois fréquences très différentes, ce qui constitue une qualité particulièrement appréciée, mais qui ne pourra être développée ici.

Enfin la sécurité de fonctionnement est assurée par le fait que les émetteurs-récepteurs peuvent être mis en service individuellement en cas de besoin. On n'est donc pas obligé de doubler l'ensemble de l'appareillage.

2. DESCRIPTION SOMMAIRE ET FONCTIONNEMENT DU RADAR DIVERSITÉ.

Un exemple de réalisation est le radar diversité à trois voies, composé sommairement des éléments suivants :

Une antenne de veille unique, de grandes dimensions, suivie d'un filtre hyperfréquence qui distribue les ondes de trois fréquences différentes, avec un écart de 100 Mc/s environ, sur trois voies respectivement.

Ces trois voies aboutissent chacune à l'un des trois émetteurs-récepteurs, qui produisent des impulsions de puissance 1 MW, de durée 2 μs et de longueur d'onde dans la bande des 10 cm. Les impulsions des trois émetteurs sont synchronisées et décalées entre elles d'un retard égal à leur propre durée environ. A la réception, en vidéo, elles sont remises en coïncidence au moyen de lignes à retard avant d'être combinées les unes aux autres; il existe quatre possibilités de combinaisons arithmétiques pour les trois voies appelées a, b, c, soient :

$$A_3 = (a + b + c),$$
$$M_3 = (a \times b \times c),$$
$$D_1 = (ab + bc + ca),$$
$$D_2 = (a + b)(b + c)(c + a).$$

Ces différentes combinaisons sont réalisées au moyen de circuits d'addition classiques et de multi-

plicateurs en anneau à éléments quadratiques. Le signal résultant est envoyé sur des indicateurs panoramiques.

3. CALCUL DES PERFORMANCES D'UN RADAR DIVERSITÉ.

3.1. Calcul des probabilités de combinaisons de signaux.

3.1.1. Forme de probabilité a la sortie vidéo d'un récepteur radar. — Deux cas se présentent : dans l'un, le signal est absent, seul le bruit gaussien engendré par les circuits du récepteur

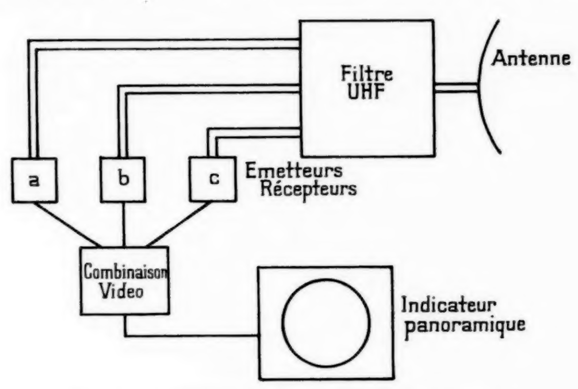


Fig. 1. — Schéma sommaire du radar diversité.

subsiste; dans l'autre cas, le signal est présent mélangé au même bruit. Le détecteur, qu'on supposera d'abord de caractéristique linéaire, n'utilise que l'enveloppe des signaux moyenne fréquence reçus, dont la porteuse disparaît par filtrage basse fréquence : la nature du signal faible mélangé au bruit est ainsi notablement modifiée, car l'information de phase s'évanouit. La distribution de probabilité du bruit qui était gaussienne avant détection prend une forme nouvelle qui a été calculée dans les deux cas précités par plusieurs auteurs, notamment par Rice [4] et Bennett [5]. C'est, pour le bruit seul, la forme dite de Rayleigh

$$p_b(\rho)\,d\rho = \frac{\rho}{\sigma^2}\,e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\,d\rho,$$

où $p_b(\rho)\,d\rho$ est la probabilité de trouver un échantillon de bruit d'amplitude comprise entre ρ et $\rho + d\rho$, tandis que σ^2 est la puissance moyenne du bruit avant détection.

Mais on préfère donner à l'amplitude ρ une forme normalisée en fonction de la puissance du bruit par un changement de variable

$$x = \frac{\rho}{\sigma}, \qquad dx = \frac{d\rho}{\sigma},$$

d'où

$$(1) \qquad p_b(x)\,dx = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

De même dans le cas d'un signal fixe noyé dans le bruit, on obtient

$$p_s(\rho)\,d\rho = \frac{\rho}{\sigma^2}\,e^{-\frac{\rho^2+A^2}{2\sigma^2}}\,I_0\left(\frac{A\rho}{\sigma^2}\right)d\rho,$$

où $\frac{A^2}{2}$ figure la puissance du signal seul et peut être remplacé par la notation normalisée

$$s^2 = \frac{A^2}{2\sigma^2}.$$

Après normalisation, la formule s'établit ainsi

$$(2) \qquad p_s(x)\,dx = x\,e^{-\left(\frac{x^2}{2}+s^2\right)}\,I_0(\sqrt{2}\,xs)\,dx,$$

I_0 étant la fonction de Bessel d'ordre 0 d'une variable imaginaire, ou fonction modifiée de première espèce.

On peut par ailleurs tirer de ces distributions, par une intégration adéquate, la probabilité que le bruit ou le signal dépassent un niveau x_1 fixé.

Cas du bruit :

$$(3) \qquad P_b(x_1) = \int_{x_1}^{+\infty} p_b(x)\,dx = e^{-\frac{x_1^2}{2}}.$$

Cas du signal :

$$(4) \qquad P_s(x_1) = \int_{x_1}^{+\infty} p_s(x)\,dx = \int_{x_1}^{+\infty} x\,e^{-\left(\frac{x^2}{2}+s^2\right)}\,I_0(\sqrt{2}\,xs)\,dx.$$

Cette dernière forme n'est pas intégrable mathématiquement. Une intégration numérique est nécessaire, elle a permis d'établir les courbes de la figure 3.

On s'est placé jusqu'ici dans le cas d'une détection linéaire. En pratique, surtout pour les faibles signaux, celle-ci est plutôt voisine d'une forme quadratique, qui présente du reste deux avantages : elle simplifie les formules et permet la solution des intégrales dans certains cas. D'autre part, plusieurs auteurs ont démontré, ce qu'on a du reste pu vérifier, que la détection quadratique était la forme optimum de détection, légèrement meilleure que la détection linéaire. Les formules précédentes se présentent alors de la façon suivante.

Soient

$$\xi = \frac{x^2}{2}, \qquad \mathrm{d}\xi = x\,\mathrm{d}x, \qquad S = s^2.$$

On a

$$p(\xi)\,\mathrm{d}\xi = p(\xi)\,x\,\mathrm{d}x = p(x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$p(\xi) = \frac{1}{x}\,p(x)$$

d'où l'on tire

$$(5) \qquad p_B(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

$$(6) \qquad p_S(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-(\xi+S)}\,I_0(2\sqrt{\xi S})\,\mathrm{d}\xi.$$

$$(7) \qquad P_B(\xi_1) = \mathrm{e}^{-\xi_1}.$$

$$(8) \qquad P_S(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\xi+S)}\,I_0(2\sqrt{\xi S})\,\mathrm{d}\xi.$$

Cette dernière formule ne peut pas non plus être intégrée mathématiquement. On notera que la probabilité sera la même pour ξ_1 et pour x_1 si l'on a

$$\xi_1 = \frac{x_1^2}{2}.$$

3.1.2. Forme de probabilité de combinaisons de voies vidéo indépendantes. — Les combinaisons de voies vidéo considérées font appel à des opérations simples d'addition et de multiplication, mais une formule générale permet de calculer la probabilité élémentaire d'une vidéo résultant d'opérations quelconques sur un certain nombre de voies vidéo composantes indépendantes.

A partir des notions de densité de probabilité et de probabilité élémentaire énoncées précédemment, on peut traiter le cas de trois voies combinées : x, y, z dont la résultante serait

$$\rho = f(x, y, z).$$

Par exemple :

$$\rho = x + y + z.$$
$$\rho = xyz.$$
$$\rho = xy + yz + zx.$$
$$\rho = (x + y)(y + z)(z + x).$$

Notons que, dans les exemples précités, ρ est une fonction croissante avec chacune des variables x, y, z.

On utilisera le théorème classique du produit des probabilités énoncé comme suit : la probabilité pour deux événements indépendants de se produire simultanément, est égale au produit de leurs probabilités respectives.

Supposons d'abord y constant et égal à y_1 : dans un intervalle x à $x + \mathrm{d}x$, la fonction f sera toujours supérieure à ρ, si z est supérieur à $g(\rho, x, y_1)$. D'où la probabilité partielle

$$p(x)\,\mathrm{d}x\,P[(z) > g(\rho, y_1, x)].$$

La probabilité pour toutes les valeurs de x sera

$$\int_0^{+\infty} p(x)\,P(z)\,\mathrm{d}x$$

et si y varie, on a finalement

$$(9) \qquad P(\rho) = \int_0^{+\infty} p(y)\,\mathrm{d}y \int_0^{+\infty} p(x)\,P(z > g)\,\mathrm{d}x.$$

Il va de soi que cette formule est tout à fait générale (c'est-à-dire même si l'on a $s_x = s_y = s_z$).

Une application particulière de la formule précédente est développée en annexe. Elle concerne le calcul de la probabilité d'une somme de n bruits de forme quadratique

$$(10) \qquad p_B^n(\mathcal{A}_n)\,\mathrm{d}\mathcal{A}_n = \frac{(\mathcal{A}_n)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-\mathcal{A}_n}\,\mathrm{d}\mathcal{A}_n.$$

$$(11) \qquad P_B^n(\mathcal{A}_n) = \mathrm{e}^{-\mathcal{A}_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\mathcal{A}_n)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Dans le cas d'une somme Σ_n de n signaux de forme quadratique, on a

$$(12) \qquad p_{\Sigma_n}^n(\mathcal{A}_n)\,\mathrm{d}\mathcal{A}_n = \left(\frac{\mathcal{A}_n}{\Sigma_n}\right)^{\frac{n-1}{2}} I_{n-1}(2\sqrt{\mathcal{A}_n \Sigma_n})\,\mathrm{e}^{-(\mathcal{A}_n+\Sigma_n)}\,\mathrm{d}\mathcal{A}_n.$$

$$(13) \qquad P_{\Sigma_n}^n(\mathcal{A}_n) = P_{\Sigma_n}^1(\mathcal{A}_n) + \mathrm{e}^{-(\mathcal{A}_n+\Sigma_n)} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{\mathcal{A}_n}{\Sigma_n}\right)^{\frac{k-1}{2}} I_{k-1}(2\sqrt{\mathcal{A}_n \Sigma_n}).$$

où I_{k-1} est la fonction de Bessel modifiée de première espèce, d'ordre $k - 1$.

Ces formules montrent une particularité remarquable de la sommation des signaux quadratiques, dont la probabilité ne dépend que de leur puissance totale Σ_n.

Si l'on traçait les courbes de probabilité pour un nombre croissant de signaux additionnés, mais en conservant Σ_n constant quel que soit n, on verrait que pour un Σ_n faible, une valeur de n égale ou proche de 1 donnerait une courbe presque semblable à la forme de Rayleigh, qui tendrait vers une forme gaussienne pour une valeur n croissant. Dans le cas d'une forte valeur de Σ_n, les courbes de probabilité seraient au contraire presque confondues pour toutes valeurs de n en une forme gaussienne. Cet effet découle de la loi des grands nombres, qui énonce que la somme d'un grand nombre de composants de forme aléatoire quelconque tend toujours vers une forme gaussienne.

3.2. Choix d'une méthode de calcul des performances réelles d'un radar.

On vient d'examiner la forme aléatoire des signaux et du bruit issus d'un radar classique ou d'un ensemble diversité. Il importe maintenant de voir comment ces signaux sont utilisés, et comment on en tire une information pratique : autrement dit, comment ils se présentent à l'observateur sur l'écran de l'indicateur panoramique et quel jugement porte l'observateur sur la représentation qui lui est donnée.

Cependant une notion simple a été largement utilisée pour l'évaluation de performances relatives d'un radar, c'est le critère exposé par Middleton [6] et Uhlenbeck [7] selon lequel un $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ vidéo est considéré comme détectable, si son niveau au-dessus du bruit moyen est suffisamment élevé devant la racine carrée de la fluctuation moyenne quadratique du bruit. On pose ainsi un rapport signal vidéo qui servira à comparer les radars de caractéristiques différentes et d'où découlera la notion du rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ minimum à l'entrée du récepteur, nécessaire pour produire ce rapport vidéo. De plus, le signal et le bruit vidéo, dont on vient de parler, peuvent être le résultat d'une sommation de récurrences successives qui concourent à l'information sur l'indicateur.

Cette manière de procéder peut être utile, lorsque les radars à comparer sont de caractéristiques voisines. Elle est particulièrement valable dans le cas où l'information est obtenue d'un grand nombre de récurrences, sommées par l'indicateur, car le bruit se présente alors d'une façon presque uniforme avec une distribution quasi gaussienne autour de la valeur moyenne. Elle ne l'est déjà plus, comme on va le voir, lorsque l'écran de l'indicateur présente un fond non uniforme, et elle ne peut plus être considérée lorsque les signaux de plusieurs voies sont combinés en une résultante, dont la distribution de probabilité dans le bruit s'écarte notablement de la distribution gaussienne, ce qui est surtout le cas pour une combinaison non linéaire.

Elle est de plus très insuffisamment descriptive si les radars à comparer sont très différents et que les courbes de probabilité de détection sont de formes très différentes : c'est particulièrement ce qui se passe quand on a affaire à des échos fluctuants qui « étalent » la courbe de probabilité en fonction de l'amplitude du signal, défaut qu'on cherche à réduire dans le système diversité.

Une méthode plus appropriée doit être trouvée, si l'on veut connaître la qualité de l'information en fonction de la puissance du signal rapportée au bruit à l'entrée du ou des récepteurs. Un certain nombre d'auteurs (*cf.* [8], [9], [10], [11], [12]) procèdent de la façon suivante :

Si l'on introduit une information x dans le récepteur, celui-ci par son bruit propre dégrade l'information x et donne y. Deux types d'erreurs peuvent apparaître en y :

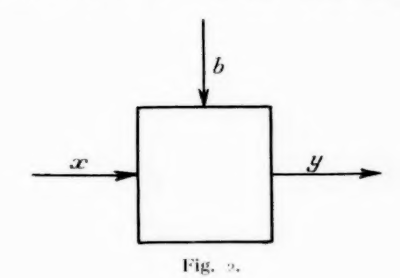


Fig. 2.

1° La fausse alarme, lorsqu'on reçoit un signal, qui n'existe pas à l'entrée, mais est dû au bruit;

2° Le défaut de signal, lorsque celui-ci est diminué par la superposition du bruit, de telle sorte qu'on ne le détecte pas. Il y a un équilibre à réaliser entre ces deux types d'erreurs pour obtenir le taux d'information optimum avec un signal donné, mais en général la probabilité de fausse alarme est imposée, ce qui détermine un seuil de détection à partir duquel on peut calculer la probabilité de détection du signal

(notion complémentaire de l'erreur de type 2), utilisée pour la mesure de la qualité d'information. Assez souvent la théorie des conditions optima de détection de Neyman-Pearson [8] est utilisée. Les opérations sont les suivantes : détection quadratique de l'enveloppe du signal, intégration des échantillons successifs, sélection d'amplitude au-dessus d'un seuil fixé par la probabilité de fausse alarme. Cependant ces études sont assez théoriques et l'on trouve peu d'exposés qui tiennent compte des conditions réelles et des imperfections qui ne permettent pas de tirer toute l'information disponible à la sortie des récepteurs. De même, les résultats statistiques, qui permettaient d'appuyer des hypothèses ou des simplifications nécessaires à cette étude complexe, sont généralement considérés comme confidentiels dans les différents pays.

Récemment un article intéressant de Hall [13] reprenait plusieurs exposés parus précédemment en vue d'effectuer le calcul complet de la portée d'un radar. Son rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ minimum détectable tenait compte de différents facteurs : dégradation du matériel et conditions d'observation, intégration des impulsions successives, forme du faisceau d'antenne, adaptation de la largeur de bande moyenne fréquence, pouvoir discriminateur de l'écran de l'indicateur et de l'œil. La fluctuation de l'écho à chaque tour d'antenne était également superposée aux facteurs précédents. Ce procédé est très utile pour un radar classique, mais les courbes doivent être recalculées dans le cas de la diversité et les approximations sur la fluctuation des échos ne sont plus valables. D'autre part, le choix d'une probabilité de fausse alarme n'est pas précisé.

C'est pourquoi notre préférence s'est portée sur un procédé exposé par Ross [14] il y a quelques années, peu connu, semble-t-il, en tous cas peu cité, à tort. Il est en effet le résultat d'une étude approfondie, et l'analyse est très détaillée; il est susceptible d'une large généralisation, moyennant quelques adaptations. Certains points, comme on le verra, sont cependant obscurs ou peuvent donner lieu à discussion : il est heureux que les facteurs les plus difficiles à déterminer aient une action modérée sur la détection dans un large domaine.

Méthode de Ross. — On résumera le procédé utilisé par Ross.

1° *A la sortie du récepteur.* — On reçoit un signal ou un groupe de signaux mélangés au bruit, l'ensemble étant complètement caractérisé par sa distribution de probabilité, qu'on a exposée plus haut, et par sa fonction d'autocorrélation. Cette dernière notion est très peu maniable pour les calculs ultérieurs et l'on est obligé de la remplacer par une représentation de la vidéo, formée d'une suite d'impulsions élémentaires juxtaposées de durée suffisamment faible pour suivre correctement l'enveloppe réelle vidéo, mais suffisamment grande pour que les fluctuations de deux impulsions voisines soient indépendantes l'une de l'autre. En réalité l'autocorrélation entre échantillons séparés par un intervalle de temps donné est fonction de la bande passante B du récepteur et l'on choisit une durée d'impulsion élémentaire égale à

$$\theta = \frac{1}{2B}.$$

L'indépendance de deux impulsions successives n'est donc pas totale, mais cela représente un compromis qui ne doit pas affecter sensiblement les résultats (ainsi qu'on peut le voir sur les courbes de Schwartz [9]).

Si l'on examine le signal rectangulaire de durée T après passage dans le filtre moyenne fréquence du récepteur dont la bande est grossièrement adaptée ($1 \leq BT \leq 2$) sa forme a été notablement modifiée et tend vers une allure gaussienne qui peut être remplacée pour la simplicité de la représentation par une impulsion rectangulaire de même amplitude et de durée égale à 2θ, ce qui représente un nouveau compromis qui affecte peu les propriétés ultérieures. Le signal mélangé au bruit sera donc finalement considéré comme formé de deux impulsions élémentaires engendrées par une même impulsion de signal mélangée à une forme de bruit indépendante.

2° *Sur l'écran de l'indicateur panoramique.* — Les caractéristiques propres de transmission de l'indicateur à intensité lumineuse modulée, donnent au signal vidéo sa forme définitive : ce sont principalement la caractéristique d'amplitude, ou plutôt l'intensité lumineuse, le pouvoir séparateur associé à celui de l'œil et la forme géométrique donnée au signal en fonction du mode et des caractéristiques du balayage.

On traduit mathématiquement ces propriétés par une intégration des impulsions élémentaires de signal et de bruit, et, si les dimensions du signal sur l'écran sont insuffisantes pour être détaillées par le faisceau du tube cathodique ou par l'œil, l'intégration portera sur une surface minimum appelée *spot*, supérieure aux dimensions du signal et comprenant un nombre d'impulsions élémentaires de bruit supérieur

au nombre d'impulsions élémentaires de signaux : d'où une perte de sensibilité *a priori*. Ross, pour la commodité des calculs, suppose qu'avant de moduler le tube cathodique par les signaux vidéo, on a opéré une sélection d'amplitude par un ébasage, suivi d'un écrêtage à peine supérieur ou d'un circuit de mise en forme quelconque qui « normalise » l'amplitude des impulsions à l'entrée du tube cathodique. On a ainsi une double possibilité, soit apparition d'une intensité lumineuse unitaire, soit aucune apparition, avec une distribution relative au niveau d'ébasage et à la puissance du signal qui a été donnée au paragraphe 3.1. La sommation des intensités est ainsi faite sur des valeurs discrètes (0 ou 1) et ne dépend pas de la distribution vidéo à la sortie du récepteur : si donc le signal est constant sur toute l'intégration, on peut utiliser en toute rigueur la formule binomiale pour obtenir la distribution globale. A savoir :

$$\frac{w!}{y!(w-y)!}P^y(1-P)^{w-y}$$

probabilité d'obtenir une amplitude de y unités d'intensité sur w intégrations, avec une probabilité élémentaire P de dépasser le niveau d'ébasage.

Si l'on veut obtenir que l'intensité y égale ou dépasse un nombre r d'unités, on fera la sommation de la formule binomiale pour toutes les valeurs de $y = r$ à w.

Ross suppose que l'intégration du signal quantifié est pratiquement peu différente de l'intégration analogique sous condition que le niveau d'ébasage soit correctement choisi, ce que les calculs semblent confirmer. Harrington [11] qui a traité d'une façon plus complète ce problème, prouve qu'une faible différence apparaît dans le cas d'un signal fixe (il a notamment trouvé une forme approchée plus maniable mathématiquement que la forme binomiale).

3° *Comportement de l'observateur*. — L'observateur apporte dans la détection ses caractéristiques propres qui sont principalement : d'une part, le pouvoir séparateur et la sensibilité au contraste de l'œil, d'autre part son jugement qui lui permet d'estimer si les particularités d'un signal visuel sont suffisamment nettes pour le considérer comme un objectif réel ou si, au contraire, elles sont insuffisantes. Apparemment, un critère de détectabilité devra s'appuyer sur une différence d'intensité et éventuellement sur une différence de forme ou de surface, ce qui conduit Ross à former plusieurs critères suivant les cas. Selon cet auteur, qui s'appuie sur les expérimentations fondamentales de Hopkinson [15] et de Payne-Scott [16], l'observateur placé à 60 cm de l'écran de l'indicateur embrasse une surface comprise dans un cercle de 10 cm de diamètre environ et son acuité visuelle jointe au pouvoir séparateur du tube cathodique lui permet de considérer une surface minimum comprise dans un cercle de 1 mm de diamètre, appelée spot. C'est sur cette surface d'observation comprenant G = 10 000 spots que l'observateur porte son jugement.

Dans le critère A, le but représenté par plusieurs échos successifs occupe sur l'écran une surface inférieure ou égale à un spot. Le critère repose donc sur une différence d'intensité lumineuse non pas au-dessus du bruit de fond moyen, mais comme il a été prouvé, au-dessus du spot de bruit le plus lumineux (principalement si le fond lumineux est très contrasté).

Ce spot de bruit le plus lumineux, d'intensité r, selon Ross, a une probabilité ${}_wP_r$ donnée par la formule

$$G\,r\,{}_wP_r = 1 \tag{14}$$

qui indique que le nombre le plus probable de spots de luminosité égale ou supérieure à r est l'unité. On a de plus

$${}_wP_r = \sum_{y=r}^{w} \frac{w!}{y!(w-y)!} P_B^y (1-P_B)^{w-y} \tag{15}$$

probabilité pour que, sur w impulsions élémentaires de bruit comprises dans le spot, r impulsions ou davantage contribuent à la luminosité avec une probabilité individuelle égale à P_B.

Cette probabilité peut être calculée directement à l'aide des tables de Pearson [17].

La luminosité du but pour assurer sa détection doit être k fois celle du bruit maximum, donc égale à kr. Ce facteur de contraste k varie comme l'inverse de la racine carrée de la brillance : on admet une valeur moyenne de 2. La probabilité de détection sera donc

$$P_D = {}_zP_{2r} = \sum_{y=2r}^{z} \frac{z!}{y!(z-y)!} P_S^y (1-P_S)^{z-y} \tag{16}$$

où z est le nombre d'échos réfléchis par le but au cours d'une illumination, multiplié par 2 pour tenir compte du fait que chaque écho est représenté par deux impulsions élémentaires, et P_S la probabilité individuelle de ces échos au-dessus du niveau d'ébasage. Ross admet qu'on peut remplacer le diagramme

horizontal d'antenne par un diagramme équivalent d'ouverture à 1 dB et d'amplitude maximum et constante.

Cela correspond à une ouverture de $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,578$ fois celle qui est habituellement considérée à 3 dB. On rappellera que ce problème a été traité par Blake [18] qui a trouvé un facteur variable de 0,47 à 0,67 suivant la force du signal

On indiquera finalement le processus de recherche du niveau d'ébasage lié à P_B et de l'intensité de base r, cette recherche devant aboutir à la détection optimum.

On choisira une valeur de r quelconque (en général inférieure ou égale à $\frac{z}{4}$) et l'on calculera P_B de telle sorte que

$$_w P_r = \frac{1}{G r}.$$

Ce calcul est facilité dans la plupart des cas où l'on a le droit d'utiliser une formule approchée (P_B faible)

$$P_B \approx \left[\frac{(r-1)!\,(w-r)!}{G w!}\right]^{\frac{1}{r}}. \tag{17}$$

Connaissant P_B on en déduit sur les courbes de probabilité le niveau d'ébasage et la probabilité élémentaire d'un signal S choisi. On est alors en mesure de calculer $_z P_{zr}$ et l'on recommence en changeant la valeur de r jusqu'à obtenir la probabilité de détection P_D la plus forte.

Le critère B concerne la détection d'un but qui occupe l'espace de deux spots environ. Il repose uniquement sur la différence de surface à intensité égale à celle du spot de bruit le plus lumineux : soit r dans les deux cas. La probabilité du spot de bruit le plus lumineux, $_w P_r$, sera la même que pour le critère A, mais on aura

$$P_D = (_z P_r)^2.$$

On peut étendre le critère B à une surface de trois spots.

Le critère C englobe tous les cas où un plus grand nombre de spots sont compris dans la surface du but. Dans ce cas on prend un nombre égal de spots de bruit qu'on intègre globalement sur les W impulsions élémentaires de bruit de la surface totale, de même que pour les Z échos, et l'on choisit une probabilité de fausse alarme $_B P_B$ d'une valeur semblable à celle du critère B : cette probabilité de fausse alarme n'est pas à confondre avec la probabilité du spot le plus brillant, c'est la probabilité de trouver deux spots de bruit juxtaposés ou plus, de brillance égale ou supérieure à r, ou si l'on veut, la probabilité de détection du bruit dans les mêmes conditions que le signal. Ross a trouvé une probabilité de confusion par zone d'observation égale à $\frac{G}{4}$ d'où

$$_B P_B = \frac{4}{R G^2}. \tag{18}$$

Le procédé est le même que pour le critère A : on considère la surface totale du but comme un seul spot avec W impulsions de bruit et Z impulsions de signal, $_B P_B$ prenant sa nouvelle valeur (18) et en faisant $k = 1$.

La valeur approchée de P_B sera donc

$$P_B \approx \left[\frac{4(R-1)!\,(W-R)!}{G^2 W!}\right]^{\frac{1}{R}}. \tag{19}$$

De cet exposé on peut voir que les conditions de détection ont été analysées méthodiquement. Plusieurs simplifications semblent justifiées : leur validité devrait être pourtant étudiée plus rigoureusement. Le point le plus délicat est l'établissement de critères valables dans les différentes circonstances qui peuvent se présenter : beaucoup d'auteurs utilisent la notion de probabilité de fausse alarme sans prendre soin de préciser sa valeur pratique. A Ross revient le mérite d'avoir cherché à lui donner une forme concrète; il reste à espérer qu'on pourra améliorer cette forme encore assez vague, lui donner une base plus solide et trouver une confirmation dans de nombreuses expériences pratiques. Quelques remarques peuvent être faites : entre autres les critères de Ross s'appliquent directement à la recherche d'un but, mais ne donnent pas d'indication immédiate sur la poursuite d'un but par un opérateur. D'autre part, des difficultés surgissent quant à la détermination du facteur k pour le critère A et les autres critères n'ont pas un fondement très sûr : on peut se demander notamment si l'on ne doit pas tenir compte de la forme du but allongé de préférence suivant un arc de cercle concentrique à l'écran cathodique, ce qui aurait pour effet de diminuer sensiblement la probabilité de fausse alarme.

3.3. **Cas d'un signal fluctuant.**

Il n'a été question dans les calculs précédents que de signaux d'amplitude constante à l'entrée des récepteurs. Or les échos reçus par le récepteur radar

sont constitués d'un grand nombre d'échos réfléchis sur les surfaces élémentaires de la cible et dont les phases relatives sont fonction des distances relatives antenne-surface élémentaire de cible. Généralement, les cibles à repérer sont des objets mobiles, tels qu'un avion, et leur « présentation » dans le faisceau radar varie continuellement, de sorte que les surfaces élémentaires se déplacent les unes relativement aux autres d'une façon souvent imprévisible, surtout dans le cas d'une cible éloignée. Les phases des échos élémentaires varient aussi d'une manière aléatoire et l'écho résultant fluctue lui-même au hasard en amplitude et en phase. On admet généralement que la fluctuation d'amplitude est caractérisée par la distribution de probabilité de Rayleigh [19], soit, en amplitude,

$$(20)\qquad p_{\bar s}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{s}{\bar s^2}\,e^{-\frac{s^2}{\bar s^2}}\,\mathrm{d}s$$

et en puissance

$$(21)\qquad p_{\bar S}(S)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\bar S}\,e^{-\frac{S}{\bar S}}\,\mathrm{d}S.$$

De plus, la fluctuation est suffisamment lente pour que les échos issus d'un même but au cours d'une illumination radar puissent être considérés comme de même puissance, tandis que les échos réfléchis à chaque tour d'antenne sont absolument indépendants. s et S caractérisent des valeurs moyennes sur un grand nombre de tours d'antenne.

Le calcul de probabilité de détection pour un signal fluctuant devra être complété de la manière suivante :

$$(22)\qquad {}_{\bar S}P_D = \int_0^{\infty} {}_{S}P_D\,p_{\bar S}(S)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\bar S}\int_0^{\infty} {}_{S}P_D\,e^{-\frac{S}{\bar S}}\,\mathrm{d}S.$$

Dans le cas d'un radar diversité, on utilise des émetteurs de fréquence suffisamment différente pour que les signaux reçus par chacun des récepteurs soient indépendants entre eux. La différence de fréquence minimum pour avoir des signaux incohérents est déduite de l'étude de Simon [19], où est introduite la notion de diamètre de corrélation. On montre que cette différence ΔF minimum est fonction uniquement des dimensions de la cible et non de la fréquence des émetteurs, soit

$$(23)\qquad \Delta F = \frac{2c}{9D} = \frac{6{,}68.10^3}{D}\quad \text{Mc/s},$$

avec c vitesse de la lumière en centimètres par seconde et $2D$ dimension principale de l'avion en centimètres.

La probabilité de détection d'un signal résultant d'une combinaison de n signaux incohérents, mais de même valeur moyenne S est

$$(24)\qquad {}_{\bar S}P_D = \frac{1}{\bar S^n}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{S_1}{\bar S}}\,\mathrm{d}S_1 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{S_2}{\bar S}}\,\mathrm{d}S_2 \times \int\cdots\int_0^{+\infty} e^{-\frac{S_n}{\bar S}}\,{}_{S_1S_2\ldots S_n}P_D\,\mathrm{d}S_n.$$

Il existe cependant une exception notable dans le cas d'une sommation de signaux de forme quadratique [form. (13)]. On a vu que $P_{S_1S_2\ldots S_n}$, de même que ${}_{S_1S_2\ldots S_n}P_D$, variait en fonction de la somme des signaux

$$\Sigma_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n,$$

non en fonction de la valeur individuelle de ces signaux.

On a donc

$${}_{\bar S}P_D = \int_0^{\infty} {}_{\Sigma_n}P_D\,p_{\bar S}(\Sigma_n)\,\mathrm{d}\Sigma_n.$$

Or $P_{\bar S}(\Sigma_n)\,\mathrm{d}\Sigma_n$ est la distribution d'une somme de signaux de même forme que le bruit vidéo. On a donc par analogie avec la distribution trouvée pour une somme de bruits [10]

$$p_{\bar S}(\Sigma_n)\,\mathrm{d}\Sigma_n = \frac{1}{\bar S_n}\,\frac{(\Sigma_n)^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\frac{\Sigma_n}{\bar S}}\,\mathrm{d}\Sigma_n.$$

d'où

$$(25)\qquad {}_{\bar S}P_D = \frac{1}{\bar S^n}\int_0^{+\infty} {}_{\Sigma_n}P_D\,\frac{(\Sigma_n)^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\frac{\Sigma_n}{\bar S}}\,\mathrm{d}\Sigma_n.$$

Cette formule suggère un important avantage de la combinaison linéaire, car la probabilité d'une combinaison faisant intervenir des opérations de multiplication diminue rapidement quand, la somme des puissances de signaux étant constante, leurs valeurs individuelles divergent. Dans le cas d'une sommation, la probabilité reste toujours maximum.

4. EXEMPLE D'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE ROSS A UN RADAR DIVERSITÉ.

On a pris le cas d'un radar diversité à trois émetteurs-récepteurs de fréquences différentes et de caractéristiques suivantes :

Durée de l'impulsion : $T = 2\ \mu s$;
Bande passante : $B = 0{,}8$ Mc/s; d'où $BT = 1{,}6$;
Fréquence de répétition : $F_r = 270$ c/s;
Rotation d'antenne : $F_a = 4$ t/mn;
Ouverture d'antenne à 3 dB : $\alpha_3 = 0^\circ{,}65$;

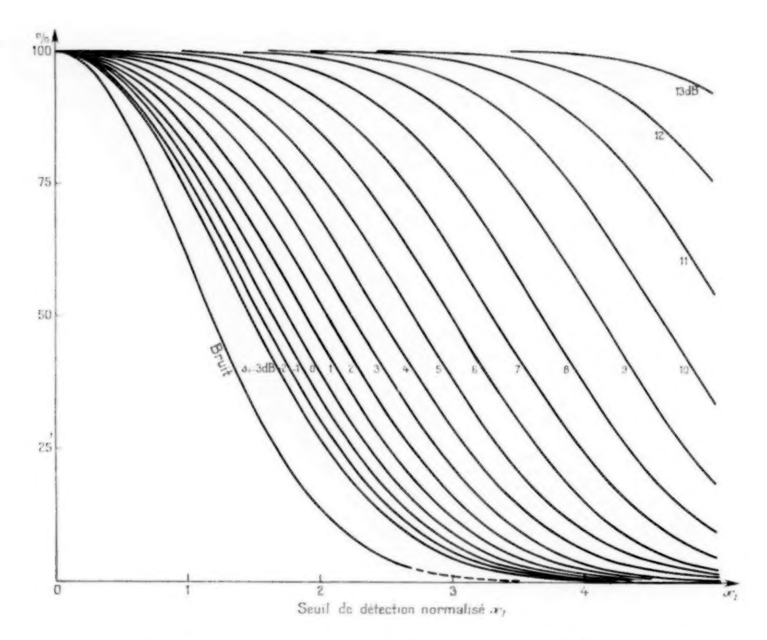


Fig. 3. — Réseau de courbes de probabilité de dépassement d'un niveau x_1 par un signal vidéo à la sortie d'un récepteur radar.

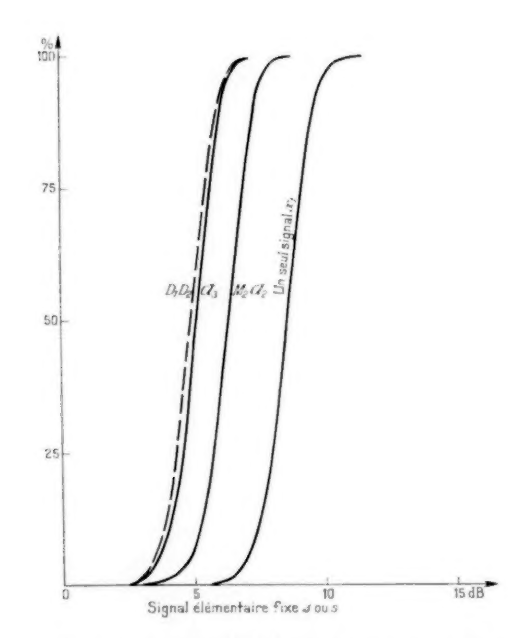


Fig. 4. — Probabilité de détection d'un signal fixe pour différentes combinaisons diversité, avec $z = 10$ et $w = 65$.

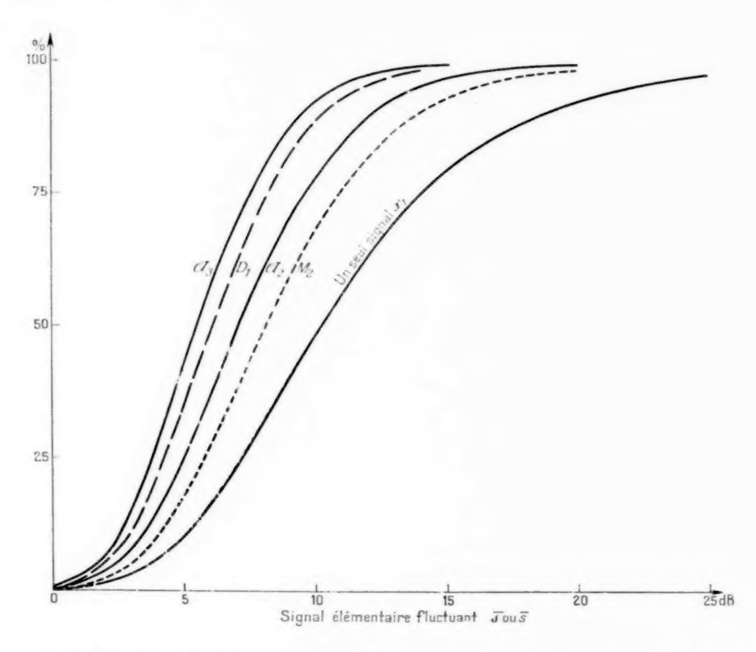


Fig. 5. — Probabilité de détection d'un signal fluctuant pour différentes combinaisons diversité, dont les voies élémentaires sont incohérentes.

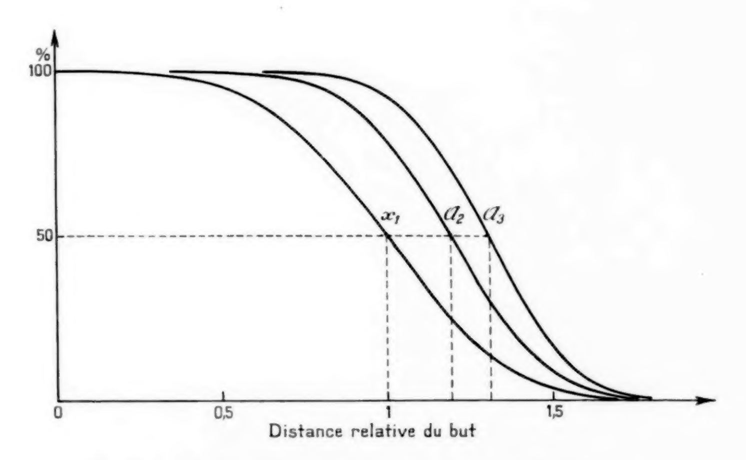


Fig. 6. — Probabilité de détection d'un signal fluctuant en fonction de la distance relative du but.

Échelle de l'indicateur de diamètre 36 cm : 300 km;

Distance du but : 200 km.

Ces données permettent l'établissement des paramètres de base (l'ouverture d'antenne a été ramenée à 1,5 dB). On trouve un seul spot occupé par les cinq échos du but et le critère A est applicable. On a

$$\theta = \frac{1}{2B} = 0{,}625\ \mu s, \qquad w = 65, \qquad z = 10.$$

On a tiré de ces données et des courbes de probabilité respectives, les courbes de détection (*fig.* 4, 5, 6) des combinaisons $\mathcal{A}_2$, M_2, $\mathcal{A}_3$, D_1 et d'un seul émetteur-récepteur, en signal fixe et en signal fluctuant, par rapport à la puissance du signal individuel et finalement par rapport à la distance du but.

5. CONCLUSION.

Les études théoriques, malgré leurs imperfections, ont permis d'obtenir une assez bonne précision sur les performances qu'on peut attendre de systèmes du genre diversité. Elles ont reçu de plus la confirmation de l'expérience basée sur un certain nombre de vols de calibration effectués dans des conditions identiques : il apparaissait dans ce cas que le critère de Ross correspondait à une détection dite « Opérationnelle » (les opérateurs radars estiment généralement trois gradations dans l'intensité des échos, soient les intensités croissantes 1, 2 et 3 : l'écho opérationnel est d'intensité 2). La sommation des signaux vidéos de différentes voies apparaît être fondamentalement la combinaison la plus efficace; elle conduit à une amélioration, à probabilité 50 %, à peu près équivalente à celle d'un émetteur de puissance égale à la puissance totale des émetteurs utilisés, ce qui n'est valable que pour des signaux fluctuants incohérents; dans ce dernier cas, de plus, une probabilité supérieure à 90 % est obtenue dans des conditions nettement meilleures à celles de l'émetteur unique n fois plus puissant. L'expérience montrait que les avantages étaient nettement moindres si l'on considérait un écho minimum de force 1 dont le calcul devrait s'effectuer sans doute en faisant k voisin de 1.

Une remarque intéressante : suivant les courbes établies par Schwartz [9], un grand nombre d'émetteurs-récepteurs incohérents tendraient à donner des résultats semblables à ceux qu'on obtiendrait de combinaisons de signaux non fluctuants.

Malgré les avantages de la sommation des signaux, il est bon cependant de ne pas négliger les combinaisons mixtes, telles que celles qu'on a appelées D_1 et D_2, car moyennant des performances de très peu inférieures, elles assurent une meilleure efficacité d'antibrouillage.

La présente étude a été facilitée par la communication des travaux de M. Villard, du S. T. T. A., qui a utilisé de façon féconde la méthode de Ross. Qu'il en soit ici remercié.

ANNEXE.

1. CALCUL DE LA PROBABILITÉ D'UNE SOMME DE n BRUITS QUADRATIQUES.

Pour une somme de deux bruits, on a

$$\mathcal{A}_2 = \xi + \eta,$$

avec

$$\xi = \frac{x^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \eta = \frac{y^2}{2}.$$

La formule de combinaison s'écrit comme suit

$$P_B^{(2)}(\mathcal{A}_2) = P_B^{(1)}(\xi > \mathcal{A}_2) + \int_0^{\mathcal{A}_2} p_B(\xi)\, P_B^{(1)}(\eta > \mathcal{A}_2 - \xi)\, d\xi$$

$$= e^{-\mathcal{A}_2} + \int_0^{\mathcal{A}_2} e^{-\xi} e^{-(\mathcal{A}_2 - \xi)}\, d\xi = e^{-\mathcal{A}_2}(1 + \mathcal{A}_2).$$

Pour une somme de trois bruits, on aurait

$$P_B^{(3)}(\mathcal{A}_3) = e^{-\mathcal{A}_3}\left(1 + \mathcal{A}_3 + \frac{\mathcal{A}_3^2}{2}\right)$$

et pour n bruits

$$P_B^{(n)}(\mathcal{A}_n) = e^{-\mathcal{A}_n}\left[1 + \mathcal{A}_n + \frac{\mathcal{A}_n^2}{2} + \ldots \frac{\mathcal{A}_n^{n-1}}{(n-1)!}\right].$$

2. CALCUL DE LA PROBABILITÉ ÉLÉMENTAIRE DE DÉTECTION D'UNE SOMME DE n SIGNAUX QUADRATIQUES.

2.1. Nous calculerons d'abord la densité de probabilité d'une somme de trois signaux au moyen de leur fonction caractéristique

Les densités de probabilité individuelles sont

$$p_{S_1}(\xi) = e^{-(S_1+\xi)} I_0(2\sqrt{S_1 \xi}),$$

$$p_{S_2}(\eta) = e^{-(S_2+\eta)} I_0(2\sqrt{S_2 \eta}),$$

$$p_{S_3}(\zeta) = e^{-(S_3+\zeta)} I_0(2\sqrt{S_3 \zeta}).$$

La fonction caractéristique de leur somme est

$$\Phi(\xi+\eta+\zeta)=\int_0^{\infty} e^{-u(\xi+\eta+\zeta)}p(\xi)\,p(\eta)\,p(\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$
$$=\varphi(\xi)\,\varphi(\eta)\,\varphi(\zeta).$$

Nous calculerons donc la fonction caractéristique $\varphi(\xi)$: les autres sont de même forme,

$$\varphi(\xi)=\int_0^{\infty} e^{-u\xi}\,e^{-(S_1+\xi)}\,I_0(2\sqrt{S_1\xi})\,d\xi$$
$$=e^{-S_1}\int_0^{\infty} e^{-\xi(u+1)}\,I_0(2\sqrt{S_1\xi})\,d\xi.$$

On trouve, d'après les tables,

$$\varphi(\xi)=e^{-S_1}\,\frac{e^{\frac{S_1}{u+1}}}{u+1}=\frac{e^{-\frac{u}{u+1}S_1}}{u+1},$$

d'où

$$\Phi(\xi+\eta+\zeta)=\frac{e^{-\frac{u}{u+1}(S_1+S_2+S_3)}}{(u+1)^3}.$$

Par la transformation inverse, on calculera

$$p^{3}(\xi+\eta+\zeta)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{u(\xi+\eta+\zeta)}\,\Phi(\xi+\eta+\zeta)\,du.$$

En posant

$$\mathcal{A}_3=\xi+\eta+\zeta,$$
$$\Sigma_3=S_1+S_2+S_3$$

$$p^{3}(\mathcal{A}_3)=\frac{e^{-\Sigma_3}}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{e^{u\mathcal{A}_3}\,e^{\frac{\Sigma_3}{u+1}}}{(u+1)^3}\,du$$
$$=\frac{e^{-(\Sigma_3+\mathcal{A}_3)}}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{e^{(u+1)\mathcal{A}_3}\,e^{\frac{\Sigma_3}{u+1}}}{(u+1)^3}\,du.$$

Posons

$$u+1=v,\qquad du=dv.$$

$$p^{(3)}(\mathcal{A}_3)=\frac{e^{-(\Sigma_3+\mathcal{A}_3)}}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{e^{v\mathcal{A}_3}\,e^{\frac{\Sigma_3}{v}}}{v^3}\,dv.$$

On peut résoudre cette intégrale par la méthode des résidus : ce sont les termes en v^2 du développement en série du numérateur.

Soit

$$\sum\frac{\Sigma_3^k}{k!}\,\frac{\mathcal{A}_3^{k+2}}{(k+2)!},$$

d'où

$$p^{(3)}(\mathcal{A}_n)=e^{-(\Sigma_3+\mathcal{A}_3)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Sigma_3^k}{k!}\,\frac{\mathcal{A}_3^{k+2}}{(k+2)!}$$
$$=\frac{\mathcal{A}_3}{\Sigma_3}\,e^{-(\mathcal{A}_3+\Sigma_3)}\,I_2(2\sqrt{\Sigma_3\mathcal{A}_3}).$$

Pour l'addition de n variables, on aurait

$$p^{n}(\mathcal{A}_n)=\left(\frac{\mathcal{A}_n}{\Sigma_n}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-(\mathcal{A}_n+\Sigma_n)}\,I_{n-1}(2\sqrt{\mathcal{A}_n\Sigma_n}).$$

2.2. Calcul de la probabilité élémentaire de dépassement.

On désire calculer

$$P^{n}(\mathcal{A}_n)=\int_{\mathcal{A}_n}^{+\infty} p^{n}(\mathcal{A}_n)\,d\mathcal{A}_n.$$

Calculons d'abord pour une variable

$$P^{1}(\mathcal{A}_1)=\int_{\mathcal{A}_1}^{+\infty} e^{-(\mathcal{A}_1+S)}\,I_0(2\sqrt{\mathcal{A}_1 S})\,d\mathcal{A}_1$$
$$=\int_{\mathcal{A}_1}^{\infty} e^{-(\mathcal{A}_1+S)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_1^k}{k}\,\frac{S^k}{k!}\,d\mathcal{A}_1$$
$$=e^{-(\mathcal{A}_1+S)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\mathcal{A}_1+\ldots+\frac{\mathcal{A}_1^k}{k!}\right)\frac{S^k}{k!}$$
$$=p_S^{1}(\mathcal{A}_1)+e^{-(\mathcal{A}_1+S)}$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\mathcal{A}_1+\ldots+\frac{\mathcal{A}_1^{k-1}}{(k-1)!}\right)\frac{S^k}{k!}=p_S^{1}(\mathcal{A}_1)+\text{II}.$$

On peut obtenir un réseau de courbes en P^{1}, soit par intégration numérique, soit en se servant de formules approchées indiquées par Rice [3].

Dans le cas général,

$$P^{n}(\mathcal{A}_n)=\int_{\mathcal{A}_n}^{+\infty}\mathcal{A}_n^{n-1}\,e^{-(\mathcal{A}_n+\Sigma_n)}\sum_{0}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_n^k\,\Sigma_n^k}{k!\,(k+n-1)!}\,d\mathcal{A}_n.$$

D'après la formule

$$\int a^m e^{-a}\,da=e^{-a}[a^m+ma^{m-1}+\ldots+m!].$$

$$P^{n}(\mathcal{A}_n)=e^{-(\Sigma_n+\mathcal{A}_n)}\sum_{0}^{\infty}\left(1+\mathcal{A}_n+\frac{\mathcal{A}_n^2}{2!}+\ldots+\frac{\mathcal{A}_n^k}{k!}\right)\frac{\Sigma_n^k}{k!}$$
$$+e^{-(\Sigma_n+\mathcal{A}_n)}\mathcal{A}_n\sum_{0}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_n^k\,\Sigma_n^k}{k!\,(k+1)!}+\ldots$$
$$+e^{-(\Sigma_n+\mathcal{A}_n)}\mathcal{A}_n^{n-1}\sum_{0}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_n^k\,\Sigma_n^k}{k!\,(k+n-1)!},$$

ce qui donne

$$P^{n}(\mathcal{A}_n)=P_{\Sigma_n}^{1}(\mathcal{A}_n)+p_{\Sigma_n}^{2}(\mathcal{A}_n)+\ldots+p_{\Sigma_n}^{n}(\mathcal{A}_n)$$
$$=\text{II}+p^{1}+p^{2}+\ldots+p^{n},$$

ou

$$=P_{\Sigma_n}^{1}(\mathcal{A})+e^{-(\mathcal{A}_n+\Sigma_n)}\left[\left(\frac{\mathcal{A}_n}{\Sigma_n}\right)^{\frac{1}{2}} I_1(2\sqrt{\mathcal{A}_n\Sigma_n})+\ldots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\mathcal{A}_n}{\Sigma_n}\right)^{\frac{n-1}{2}} I_{n-1}(2\sqrt{\mathcal{A}_n\Sigma_n})\right].$$

Connaissant $P^{1}(\mathcal{A}_n)$, il est donc facile de calculer les autres termes pour un nombre quelconque de variables.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. R. KAHN, *Ratio Squarer* (*Proc. Inst. Radio Eng.*, novembre 1954, p. 1704; mai 1955, p. 626).

[2] D. G. BRENNAN, *On the maximum signal-to-noise ratio realizable from several noisy signals* (*Proc. Inst. Radio Eng.*, octobre 1955, p. 1530).

[3] F. J. ALTMAN et W. SICHAK, *A simplified diversity communication system for beyond the horizon links* (*Trans. Inst. Radio Eng.*, Communication Systems, mars 1956, p. 50).

[4] S. O. RICE, *Mathematical analysis of random noise* (*Bell Syst. Techn. J.*, juillet 1944, p. 282; janvier 1945, p. 46).

[5] W. R. BENNETT, *Methods of solving noise problems* (*Proc. Inst. Radio Eng.*, mai 1956, p. 609).

[6] D. MIDDLETON, *Statistical detection of pulsed carriers in noise* (*J. Appl. Physics*, 1953, p. 371).

[7] V. L. LAWSON et G. E. UHLENBECK, *Threshold signals* (Série du M. I. T., n° 24).

[8] J. NEYMAN et E. S. PEARSON, *On the problem of the most efficient test of the statistical hypotheses* (*Proc. Roy. Soc.* A, t. 231, 1931, p. 289).

[9] M. SCHWARTZ, *Effects of signal fluctuation on the detection of pulse signals in noise* (*Trans. Inst. Radio Eng.*, on Information Theory, juin 1956, p. 66).

[10] E. L. KAPLAN, *Signal detection studies, with applications* (*Bell Syst. Techn. J.*, mars 1955, p. 403).

[11] J. V. HARRINGTON, *Analysis of the detection of repeated signals in noise by binary integration* (*Trans. Inst. Radio Eng.*, on Information Theory, mars 1955, p. 1).

[12] J. DUGUNDJI et ACKERLIND, *Automatic bias control for a threshold detector* (*Trans. Inst. Rad. Eng.*, on Information Theory, mars 1957, p. 65).

[13] W. M. HALL, *Calcul de la portée d'un radar à impulsions* (*Proc. Inst. Radio Eng.*, février 1956, p. 224, traduit par le SEFT D. 397).

[14] A. W. ROSS, *Visibility of radar echoes* (*Wireless Eng.*, mars 1951, p. 79).

[15] R. G. HOPKINSON, *Visibility of cathode-ray-tubes traces in radar displays* (*J. Instn. Elect. Eng.*, 1946, t. 93, Part III A, n° 5, p. 795).

[16] R. PAYNE-SCOTT, *Visibility of small echoes on P. P. I. displays* (*Proc. Inst. Radio Eng.*, février 1948, p. 180).

[17] K. PEARSON, *Tables of the incomplete β function* (Biometrika Office, London, Univ. Press, 1948).

[18] L. V. BLAKE, *The effective number of pulses per beamwidth for a scanning radar* (*Proc. Inst. Radio Eng.*, juin 1953, p. 770; décembre 1953, p. 1785).

[19] J. C. SIMON, *Quelques problèmes de fluctuation en radioélectricité* (*Ann. Radioélectr.*, 1955, t. X, n° 39, p. 3).

L'ASPECT PHYSIQUE DE LA THÉORIE DE L'INFORMATION. APPLICATION AU CHOIX DES LIAISONS MULTIPLEX ET EN TÉLÉVISION (¹)

PAR J. ORTUSI,

Ingénieur à la Compagnie Générale de T. S. F.

SOMMAIRE. — *L'auteur expose d'abord la nécessité, due à l'importance accrue de l'Information dans la vie moderne, d'inclure la notion d'Information dans un cadre scientifique par une délimitation précise du terme. Il souligne les avantages et les inconvénients d'une notion purement statistique de l'Information.*

Après avoir rappelé les définitions introduites dans la théorie (quantité d'information, redondance, codage, etc.), l'auteur analyse les deux classes d'information, distinguées récemment par Léon Brillouin : l'Information liée aux complexions particulaires d'un système physique et l'Information libre où le facteur humain entre en considération. La première classe d'Information est, à un coefficient près, équivalente à une entropie thermodynamique négative avec laquelle elle peut être échangée suivant un principe généralisant le principe de Carnot. Après quelques réflexions sur une possibilité de synthèse entre ces deux classes d'Information, l'auteur introduit la notion de « vitesse d'Information utilisable », définie comme la vitesse de transformation du codage particulier que représente un changement de classe ; il calcule cette vitesse, à partir des relations d'incertitude, en assimilant la décomposition d'un signal transmettant une Information liée à la recherche de l'extension en phase des particules véhiculant le signal. Il expose ensuite, dans le cas d'un signal sonore, les caractéristiques minima, préconisées par le C.C.I.F., pour obtenir une vitesse d'Information utilisable convenable pour une liaison téléphonique internationale.

Une application importante de la théorie est faite au cas de l'Information transmise par liaisons téléphoniques multiplex et par télévision. L'auteur calcule le rendement des systèmes multiplex les plus employés, ce rendement étant défini par le rapport de la vitesse d'Information utilisable par canal à la capacité de ce dernier, correspondant à la vitesse maximum. Il préconise, enfin, du point de vue informationnel, quelques systèmes de transmission d'images visuelles à grande vitesse d'Information.

En conclusion, l'auteur rappelle que la théorie de l'Information, très utile pour guider les techniciens vers la recherche des meilleures solutions, se trouve toutefois restreinte dans son emploi par des conditions étrangères à la théorie et sous la dépendance directe de la conjoncture économique. (C. D. U. : 621.391 : 621.396.4).

SUMMARY. — *The author first shows the necessity, due to the enhanced importance of Information in modern times, of including, for scientific purposes, the notion of Information by a precise definition of that expression.*

He stresses the advantages and disadvantages of a purely statistical notion of Information. Having recalled the definitions introduced in the theory (quantity of information, redundancy, coding, etc.), the author analyses the two classes of information, recently distinguished by Leon Brillouin : Bound Information related to particular complexions of a physical system, and Free Information where the human factor comes into consideration. The first class of information is,

(¹) Manuscrit reçu le 27 mai 1957.

apart from some coefficient, equivalent to a negative thermodynamic entropy with which it can be exchanged in accordance with a principle generalising the Carnot principle.

After a few remarks on the possibility of a synthesis between these two classes of information, the author introduces the notion of « Rate of usable Information », defined as the rate of transformation of the particular coding represented by a change of class; he calculates that rate, from the uncertainty relations, by assimilating the decomposition of a signal transmitting an Information to a search for the extension in phase of the particles carrying the signal. He then sets out, in the case of an audio signal, the minimum characteristics, recommended by the C.C.I.F. for securing a suitable rate of usable Information for an international telephone link.

An important application of the theory is the case of Information transmitted by multiplex telephone links and by television. The author calculates the efficiency of the more generally used multiplex systems, this efficiency being defined as the ratio of the rate of usable Information per channel to the capacity of the latter, corresponding to maximum rate. Finally, he favours from the information point of view, a few systems for the transmission of visual pictures with a high rate of information.

In conclusion, the author puts in a reminder that the Information theory, most useful for guiding designers in their search for the best solutions, is, however, restricted in its application by conditions foreign to the theory and directly dependent on economic considerations.

(U. D. C. : 621.391 : 621.396.4).

1. INTRODUCTION.

Il suffit d'être plongé dans le tumulte d'une grande ville moderne pour sentir intimement quelle place l'Information, sous ses aspects les plus multiples, tient dans la vie de la Cité.

Malgré un côté excessif et tapageur évident, rançon inévitable de l'intérêt suscité, elle représente la forme concrète prise par la diffusion de la pensée humaine, recherchée dans les pays civilisés, aussi bien comme un puissant levain du développement économique que comme un prodigieux moyen de distraction ou de diffusion de la culture. Avec les techniques qui lui sont associées, elle constitue le critère d'expansion, sinon d'humanisme, des nations modernes.

Aussi, à la suite de prémices posées par Shannon, une nouvelle théorie s'est proposée pour objectif de définir le cadre dans lequel devait être inclus la réalité d'un message informationnel vocal ou visuel.

Une des conséquences importantes de la théorie, en accord avec l'esprit de la physique actuelle, réside dans l'impossibilité de séparer la notion intrinsèque du message de l'idée de transmission de celui-ci, concrétisée par les moyens physiques ou physiologiques qui en permettent la diffusion.

Cette liaison étroite entre la nature du message et la nature du milieu dans lequel il est transmis a été fortement soulignée dans un Ouvrage récent de Léon Brillouin ([2]); la caractéristique physique, liée à la transmission d'une information est l'entropie de l'élément transmissif que Léon Brillouin définit comme *le manque d'information* que l'on possède sur l'état du milieu plutôt que comme un critère de son degré de désordre interne.

Dans ces conditions, une théorie thermodynamique de l'Information peut être ébauchée, en s'appuyant sur une notion physique de celle-ci plus profonde qu'une simple analogie entre les méthodes de calcul statistique employée dans les deux disciplines.

Bien que les conséquences de cet aspect de la théorie de l'Information soient surtout évidentes à l'échelle moléculaire, elles peuvent aussi attirer l'attention sur un certain caractère du mécanisme de fonctionnement des systèmes présentant une grande complexité particulaire.

C'est le cas, essentiellement, des organismes vivants, mais cette conception peut être aussi étendue à des organismes inertes comportant un grand nombre de cellules élémentaires tels que les machines analogiques modernes ou les « cerveaux » électroniques.

En nous restreignant, dans ce court exposé, à la transmission des signaux vocaux par téléphonie multiplex et à celle des images visuelles, nous essayerons de souligner comment le choix des meilleurs systèmes de transmission, préconisé par la théorie de l'Information en fonction des qualités physiologiques des organes des sens, se trouve toutefois conditionné en grande partie par de multiples facteurs économiques dépendant souvent de la conjoncture sociale ou politique.

([2]) L. Brillouin, *Science and Information Theory*, Academic Press Inc., New York, 1956.

2. LA QUANTITÉ D'INFORMATION.

Pour fournir une base mesurable à l'Information transmise, il a été nécessaire de limiter le sens vulgairement admis de ce mot; on ne pourra ainsi définir une quantité d'information qu'à partir du *résultat d'un choix* soumis à certaines règles du calcul des probabilités.

Il est évident que le choix effectué présente un caractère manifestement subjectif qui échappe au domaine d'une science physique. Pour conserver une grandeur mesurable, il est donc nécessaire d'exclure le mécanisme du choix dans l'expression de la quantité d'Information.

Celle-ci sera donc définie d'une manière purement statistique en fonction d'une situation initiale et d'une situation finale. Chacune de ces situations est caractérisée par la possibilité d'un certain nombre d'*événements* tels qu'une image visuelle ou une phrase écrite ou prononcée. La quantité d'Information devra mesurer la variation du nombre d'événements possibles, entre la situation initiale et la situation finale, résultant du choix effectué aussi bien par l'intelligence humaine que par un appareil approprié.

Cette définition exclut évidemment toute notion de la valeur de l'Information ou de son utilisation éventuelle pour un but technique, artistique ou d'éducation.

Considérons, avec cet esprit, une situation initiale dans laquelle P_0 événements sont possibles. Supposons qu'à la suite d'un phénomène, tel qu'une modification introduite dans un milieu physique, P_1 événements seulement restent possibles (P_1 est, par exemple, égal à 1 lorsqu'une phrase est correctement transmise).

La quantité d'Information, liée à la présence du phénomène, est donnée par la relation

$$(1) \qquad I = \log_2 \frac{P_0}{P_1} \quad \text{en unités binaires,}$$

la fonction logarithmique étant introduite pour satisfaire à la nature additive évidente de deux informations successives, ce qui entraîne les propriétés additives des quantités d'information correspondantes.

L'unité binaire (ou « bit ») représente une information par oui ou non; elle correspond au *quantum de quantité d'information*, puisque le nombre P_0 est au moins égal à 2.

La réalisation d'un événement constituant un message déterminé est concrétisée par la juxtaposition, dans un ordre donné, d'un grand nombre N de *symboles* élémentaires S_j tels que les lettres de l'alphabet, les différents phonèmes de la prononciation, etc. On désignera, dans ce qui suit, par n le nombre de ces symboles élémentaires et par p_j la probabilité du symbole S_j.

2.1. Vitesse d'Information.

Supposons que le nombre total de symboles transmis N soit suffisamment élevé pour que la probabilité de chaque symbole élémentaire soit égale à sa fréquence relative; le calcul du nombre de juxtapositions possibles des divers symboles dans la situation initiale est alors identique au calcul de la répartition des particules en cellules de l'espace des phases dans la statistique de Boltzmann.

Par exemple, la quantité d'Information contenue dans la source d'émission des symboles est déterminée, sous une forme discrète et avec un changement de signe dû au fait que l'on considère la situation initiale, par la même expression que la fonction de répartition H de Boltzmann (³).

La quantité d'Information moyenne par symbole est ainsi donnée par la formule

$$(2) \qquad i = \frac{I}{N} = -\sum_{j=1}^{j=n} p_j \log_2 p_j,$$

avec

$$\sum_{j=1}^{j=n} p_j = 1.$$

La formule (2) montre que les symboles trop fréquents ($p_j \neq 1$) ou les symboles trop rares ($p_j \neq 0$) apportent peu d'information.

La vitesse moyenne d'Information est donnée par la relation

$$(3) \qquad V = \frac{I}{t} = mi,$$

où m représente le débit moyen de symboles. Cette vitesse joue un grand rôle dans la théorie de l'Information.

2.2. Redondance.

La valeur de i est maximum lorsque tous les symboles sont *équiprobables et qu'aucune corrélation* n'existe entre ceux-ci.

(³) Cette analogie a conduit d'ailleurs Shannon à noter H l'expression de (2) et à l'appeler « entropie de la source de symboles ». Par suite de la différence de signe, il est préférable d'éviter ce terme qui prête également à confusion avec l'entropie thermodynamique de l'élément transmissif.

La formule (2) montre qu'elle est égale alors à

$$(4) \qquad i_m = \frac{I_m}{N} = \log_2 n.$$

On peut retrouver la relation (4), soit directement par un calcul de variations liées à partir des équations (2), soit à partir de la relation (1) dans laquelle on doit avoir, après la réalisation de l'un des événements équiprobables

$$(5) \qquad P_1 = 1, \qquad \text{avec} \quad P_0 = n^N.$$

Dans le cas où les symboles élémentaires ne sont pas équiprobables ou lorsqu'une corrélation existe entre deux ou plusieurs symboles voisins, la valeur i est inférieure à i_m. Le système employant ces symboles (la langue française, par exemple) possède alors une « redondance » Red. donnée par la relation

$$(6) \qquad \text{Red.} = 1 - \frac{i}{i_m}.$$

2.3. **Voie de transmission et codage.**

Une voie de transmission est *entièrement déterminée* par la présence des n symboles élémentaires S_j caractérisés chacun par sa probabilité p_j et par sa durée t_j.

La qualité de la voie est concrétisée par sa *capacité* C donnée par la formule

$$(7) \qquad C = \lim_{t \to \infty} \frac{\log_2 P(t)}{t},$$

où $P(t)$ représente le nombre total de messages distincts ayant la durée totale t et construits à partir des symboles S_j.

On démontre que la capacité de la voie représente la *vitesse d'Information maximum* qu'on peut obtenir quand toutes les combinaisons possibles de symboles sont permises.

Cette vitesse maximum doit être réalisée au moyen d'un *codage approprié*.

Par définition, celui-ci représente un changement déterminé dans la répartition des symboles élémentaires introduisant de nouvelles valeurs caractéristiques n', p'_j et t'_j.

On peut montrer qu'un codage réversible modifie la valeur de m et de i dans la formule (3), mais *n'introduit aucun changement dans la vitesse d'Information*. Cette propriété est semblable à celle d'un transformateur sans pertes, modifiant la tension et le courant, mais gardant inchangée la puissance.

Par contre, un codage irréversible introduit toujours une diminution de l'Information transmise ($\Delta I < 0$).

Le codage est utilisé pour *adapter la source émissive de symboles à la voie de transmission*; cette technique est assez analogue à l'adaptation des impédances caractéristiques dans un problème de circuits électriques.

L'adaptation de la source, lorsque le codage est optimum, entraîne les conséquences suivantes :

a. Les nouvelles probabilités p'_j des symboles S_j sont liées à leurs durées t'_j par la relation

$$(8) \qquad \log_2 p'_j = K t'_j,$$

K étant une constante déterminée par la relation

$$\sum_{j=1}^{j=n} p'_j = 1.$$

En particulier, lorsque les durées t'_j sont toutes égales, les symboles S'_j du code optimum sont alors équiprobables.

b. La relation (8) implique, d'une part, que la quantité d'Information doit être maximum et, d'autre part, que la *distribution la plus probable des symboles est alors réalisée*, puisque les valeurs maxima des fonctions P et $\log P$ sont atteintes pour les mêmes valeurs des variables p'_j.

c. La relation (8) indique que, dans le codage optimum, les *symboles les plus fréquents correspondent aux temps les plus courts*.

Cette condition a été réalisée intuitivement par Morse qui, dans son code, a cherché à affecter les signaux les plus brefs aux lettres les plus fréquentes.

3. LES DEUX SORTES D'INFORMATIONS.

On distingue, d'après Léon Brillouin, deux sortes d'informations :

3.1. **L'Information liée I_b.**

Celle-ci peut être définie toutes les fois où le nombre d'événements possibles est lié aux *complexions particulaires* d'un élément physique (une complexion représente un ensemble quantifié des données de coordonnées de position et de moments).

Tous les systèmes de transmission autres que les nerfs transportent une information liée. Les particules intéressées sont des molécules de l'air dans le cas du son, des électrons dans le cas de la télégraphie et des photons dans le cas de la T. S. F. ou des liaisons optiques.

On peut admettre (sauf dans le cas de liaisons optiques) que ces particules sont représentées par

des oscillateurs à fréquence ν basse ($h\nu < k\theta$) et à deux degrés de liberté (énergie cinétique + énergie potentielle); h et k sont les constantes de Planck et de Boltzmann et θ la température absolue.

Le quantum énergétique étant alors égal à $\frac{1}{2}k\theta$ par degré de liberté, le quantum de chaque oscillateur (énergie moyenne en l'absence de signal) est égal à $k\theta$.

Lors du phénomène représentant le passage du signal dans un milieu transmissif, un certain nombre de particules, sous l'effet de la source de symboles émis, subissent une augmentation quantifiée de leur énergie qu'elles peuvent échanger ensuite avec les particules du milieu voisin. Cet échange se traduit, à l'échelle macroscopique, par une quantité de chaleur fournie ΔQ et par une variation de l'entropie thermodynamique S du milieu.

Désignons par $N_{s_0} - N_{s_1}$ le nombre de quanta d'énergie transmis par l'élément physique approprié à un élément voisin (par exemple, un récepteur); la quantité de chaleur positive cédée au milieu voisin est alors

$$\Delta Q = \frac{1}{J}(N_{s_0} - N_{s_1})\,k\theta,$$

où J est l'équivalent mécanique de la calorie.

A la fin du phénomène, l'entropie de l'élément physique a donc été modifiée de la quantité négative

$$\Delta S = S_1 - S_0 = -\frac{\Delta Q}{\theta} \quad \text{cal/degré}$$

qu'on peut aussi écrire

(9) $$\Delta S = \frac{k}{J}(N_{s_1} - N_{s_0}).$$

Le nombre de complexions particulaires P_1 de l'élément transmetteur, qui restent possibles après le passage du signal, est relié au nombre de quanta d'énergie échangés par la loi de répartition statistique de Boltzmann à laquelle se ramènent, dans le cas actuel, les deux autres statistiques.

On a donc

(10) $$\frac{P_1}{P_0} = e^{N_{s_1} - N_{s_0}}.$$

Les formules (9) et (10) donnent l'expression de ΔS

(11) $$\Delta S = S_1 - S_0 = \frac{k}{J}\,L\,2\,\log_2\frac{P_1}{P_0}.$$

La formule (11) entraîne les trois conséquences suivantes :

a. La transmission d'une information *s'accompagne toujours d'une diminution de l'entropie du milieu transmissif*, compensée, d'après le principe de Carnot, par une augmentation au moins égale de l'entropie de la source d'Information.

Dans l'Information liée, les divers événements possibles d'une situation initiale ou d'une situation finale sont assimilés aux différentes complexions particulaires possibles P de l'élément physique transmetteur avant ou après le passage du signal.

On peut alors considérer la quantité d'Information I de la formule (1) comme représentant la variation

$$I = \Delta I_b$$

entre les deux situations, d'une grandeur physique I_b égale à

$$I_b = -\log_2 P.$$

La formule (11) montre qu'on a

$$\Delta I_b = I_{b_1} - I_{b_0} = -\frac{J}{k\,L\,2}(S_1 - S_0).$$

I_b est appelée « l'*Information liée* » au milieu transmissif. Cette grandeur physique ainsi définie, représente, à un coefficient près, une entropie thermodynamique négative (*négentropie*). Elle est de même nature que cette dernière et peut être échangée avec elle.

b. Le quantum d'Information étant, comme nous l'avons vu, d'une unité binaire, il existe donc un *quantum d'entropie* égal à

$$K = \frac{k}{J}\,L\,2 = 2,4.10^{-24} \quad \text{cal/degré}.$$

c. Lorsque le milieu n'est plus alimenté par la source d'Information, il devient isolé. Le principe de Carnot donne alors la relation

(12) $$\Delta S \geq 0 \quad \text{ou} \quad \Delta I_b \leq 0.$$

Un système isolé perd donc peu à peu la quantité d'Information qu'il est susceptible de fournir. Ce résultat intuitif peut donc aussi être considéré comme une conséquence du principe de Carnot.

3.2. L'Information libre I_f.

Celle-ci est définie toutes les fois où la pensée humaine entre en jeu et où il est impossible, *a priori*, de relater les événements informationnels aux complexions d'un milieu physique.

Différents auteurs ont toutefois tenté de ramener à une seule les deux classes d'Informations.

Dans le domaine de l'inconscient, on a essayé d'évaluer la vitesse d'Information très élevée des rêves, « mesurée » en estimant la quantité d'Information conservée par un individu à son réveil et en déterminant la durée du rêve par des expériences

d'acuponcture sur les nerfs qui le provoquent; on peut en déduire, par généralisation au domaine de la volonté consciente, que les particules intéressées devraient posséder un quantum d'énergie de très grande valeur correspondant à une fréquence associée très grande (de l'ordre de 10^{30}).

On a même suggéré que l'Information libre contenue dans le cerveau et transmise par les nerfs est alors liée aux complexions de neutrinos engendrés dans une réaction réversible due à la transformation de potassium radioactif en calcium dans le cerveau.

Celui-ci fonctionnerait ainsi en émetteur-récepteur d'Information libre; chaque individu étant caractérisé par une voie de transmission différente; donc, comme on le verra au chapitre 6, page 311, par une fréquence porteuse différente proportionnelle à l'énergie moyenne des neutrinos émis.

Par exemple, dans le fonctionnement du cerveau en récepteur, chaque sensation correspondrait à la quantité d'Information transmise, à l'intérieur de la voie de transmission caractéristique de l'individu, par une excitation déterminée des nerfs elle-même proportionnelle au rapport du nombre de complexions de neutrinos avant et après le phénomène excitatoire. C'est ainsi que la loi de Fechner, reliant la sensation au logarithme de l'excitation et fondamentale en pychophysique, serait une forme d'écriture de l'équation (1), ou mieux de l'équation (10), appliquées à l'Information libre.

La radiesthésie serait assimilée à une réceptivité accrue vis-à-vis de certains corps (tels que l'eau minéralisée, pour les sourciers) émetteurs naturels de neutrinos, fonctionnant en source de bruit dans la bande passante de certaines voies de transmission et la télépathie serait due à une « diaphonie » entre les voies de transmission de deux individus apparentés, justifiée par la valeur importante du libre parcours moyen des neutrinos dans l'air ou même dans les corps solides.

En dehors de ces hypothèses bien spéculatives, même en conservant un caractère abstrait à l'Information libre, on peut toujours, d'après le paragraphe 2.3, supposer que la transformation d'une Information liée en une Information libre et *vice versa peut être représentée par un codage*, au sens très strict que nous avons donné à ce mot. Celui-ci peut être irréversible (mauvaise compréhension, perte de mémoire, etc.) et nous avons vu que cela entraîne alors une diminution de l'Information transmise. On a ainsi

$$(13) \qquad \Delta I_f \leq 0.$$

3.3. **Le principe négentropique de l'Information.**

Considérons maintenant un système comprenant des sources d'Informations tant liées que libres et des éléments physiques transmetteurs.

Le système étant supposé *isolé*, quels que soient les échanges d'Information et d'entropie effectués, les formules (12) et (13) conduisent à la relation (14) qui représente une généralisation du principe de Carnot

$$(14) \qquad \Delta(S - KI_t) \geq 0.$$

l'égalité étant obtenue pour les transformations réversibles :

— S est l'entropie totale du système en calories par degré;

— I_t est l'Information totale ($I_t = I_l + I_f$), en unités binaires, pouvant être échangée entre différentes parties du système;

— K est une constante égale à $2{,}4 . 10^{-24}$.

La formule (14) constitue le *principe négentropique de l'Information*. Celui-ci présente deux aspects :

a. On peut recevoir, dans une partie du système, un *accroissement d'Information compensé par une augmentation de l'entropie générale;*

b. On peut également *procurer une quantité d'Information et obtenir ainsi une diminution localisée de l'entropie* (ceci explique très simplement le paradoxe du démon de Maxwell).

Ces échanges ne sont toutefois possibles, en général, qu'à l'échelle microscopique, par suite de la petitesse du coefficient K.

4. LA VITESSE D'INFORMATION UTILISABLE.

Toute Information liée est transmise au cerveau par l'intermédiaire d'un organe des sens approprié. La vitesse d'Information utilisable est la *vitesse de transformation d'Information liée à Information libre.* Elle dépend de la qualité des organes des sens qui effectuent cette transformation et détermine les caractéristiques techniques minima que doivent posséder les appareils de transmission d'Information pour obtenir une vitesse d'Information utilisable suffisamment élevée.

Dans le cas d'un signal sonore, par exemple, désignons par ν_m la fréquence maximum audible et par T la durée de transmission, N désignant toujours le

nombre total de symboles transmis pendant la durée T.

Le nombre de symboles élémentaires n discernés par l'oreille, lorsque l'amplitude des signaux reste à un niveau convenable, est égal au rapport de l'énergie totale (énergie du signal E_s plus énergie moyenne du bruit E_n) avec l'énergie moyenne de fluctuation E_m, puisqu'il est impossible de distinguer deux signaux dont l'énergie diffère d'une valeur inférieure à l'énergie moyenne de fluctuation.

Tous ces symboles élémentaires étant *équiprobables et sans corrélation entre eux*, la formule (4) donne la vitesse d'Information utilisable :

$$I' = \frac{I}{T} = \frac{\bar{N}}{T}\log_2 n \quad \text{bits/s} \tag{15}$$

avec

$$n = \frac{E_s + E_n}{E_m}.$$

le signal d'Information liée est véhiculé par un grand nombre de particules élémentaires d'énergie $h\nu$ dont la répartition en fréquence, c'est-à-dire en quantum énergétique, fixe la répartition spectrale du signal.

Dans ces conditions, la ***décomposition du signal en signaux élémentaires se trouve ramenée à la recherche de l'extension en phase des particules*** véhiculant le signal; celles-ci étant supposées à un seul degré de liberté, cette extension en phase peut être remplacée par la répartition statistique temporaire et énergétique des particules d'énergie voisine de $h\nu$ autour d'un instant t.

Le nombre de particules d'énergie $h\nu_j$ $(0 < \nu_j < \nu_m)$, fixant la répartition temporaire, est donné, au voisinage d'un instant t_i $(0 < t_i < T)$, par une loi normale de distribution

$$f(t) = A_{ij}\, e^{-\frac{(t-t_i)^2}{2\sigma_t^2}}\, e^{2i\pi\nu_j t}$$

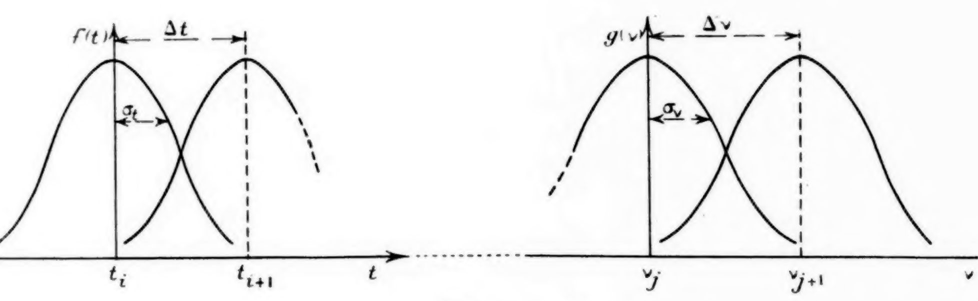


Fig. 1.

4.1. **Degré de liberté.**

Dans la formule (15), le nombre moyen de symboles transmis N représente aussi le nombre moyen d'états quantifiés, c'est-à-dire le degré de liberté du système.

Celui-ci, d'après Gabor, *doit être déterminé par les relations d'incertitude*.

Pour cela, le signal transmettant l'Information est supposé, à chaque instant, *aléatoire* aussi bien vis-à-vis de sa variation dans le temps que de sa fréquence instantanée.

Il peut être décomposé en signaux élémentaires tant en ce qui concerne sa répartition temporaire que sa répartition spectrale. Le nombre de ces signaux élémentaires discernables représente le degré de liberté du système.

Cette complémentarité temps-fréquence, où chaque grandeur joue un rôle analogue, a des raisons physiques plus profondes que la raison mathématique suggérée par la transformation de Fourier. En effet,

et la répartition spectrale ou énergétique est donnée, au voisinage de la fréquence ν_j, par la transformée de Fourier

$$g(\nu) = A_{ij}\, e^{-\frac{(\nu-\nu_j)^2}{2\sigma_\nu^2}}\, e^{2i\pi t_i \nu},$$

où σ_t et σ_ν sont les erreurs quadratiques moyennes, liées par la transformation de Fourier

$$\sigma_t \sigma_\nu = \frac{1}{2\pi}$$

équivalente à la quatrième relation d'Heisenberg

$$\sigma_t (h\sigma_\nu) = \frac{h}{2\pi}, \qquad \text{puisque} \quad \sigma_E = h\sigma_\nu.$$

La figure 1 montre deux courbes de répartitions de particules voisines en temps ou en fréquence.

Admettons que deux répartitions ne commencent à être décelables que lorsque l'intersection des deux courbes a lieu à demi-hauteur (*fig.* 1).

On a ainsi

$$\Delta t \geq 2\alpha\sigma_t \qquad \text{et} \qquad \Delta\nu \geq 2\alpha\sigma_\nu,$$

avec $e^{-\frac{\alpha^2}{2}} = 0,5$, soit $\alpha^2 = 1,4$, ce qui donne la relation d'incertitude

(16) $$\Delta t\, \Delta\nu = \frac{4\alpha^2}{2\pi} \approx 1.$$

Chaque répartition élémentaire comprenant deux degrés de liberté (le module et l'argument de A_{ij}), il en résulte que le degré de liberté du système est

(17) $$\overline{N} = 2\,\frac{T}{\Delta t}\,\frac{\nu_m}{\Delta\nu} \approx 2T\nu_m.$$

4.2. **Formule de Wiener-Tuler.**

L'énergie moyenne de bruit E_n, égale à $\frac{1}{2}k\theta$ par degré de liberté, est donc

(18) $$E_n = \overline{N}\,\frac{k\theta}{2} = T\nu_m k\theta.$$

Soit M l'écart quadratique moyen de N

$$M^2 = \overline{(N - \overline{N})^2}.$$

L'énergie moyenne de fluctuation est égale à

$$E_m = M\,\frac{k\theta}{2}.$$

Or, lorsque l'Information est liée aux complexions de particules oscillant à faible fréquence ($h\nu \ll k\theta$), la statistique d'Einstein fournit la relation très connue

(19) $$M = \overline{N} \qquad \text{ou} \qquad E_m = E_n.$$

En désignant par $S_i = \frac{E_i}{T}$ la puissance moyenne du signal, les relations (15), (17), (18) et (19) conduisent à la *formule de Wiener-Tuler*

(20) $$V = \frac{I}{T} = 2\nu_m \log_2 n \quad \text{bits/s},$$

avec

$$n = 1 + \frac{S_i}{\nu_m k\theta}.$$

La vitesse d'Information utilisable ne dépend donc que de la fréquence maximum et du rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$.

5. DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE LA VITESSE D'INFORMATION UTILISABLE EN TÉLÉPHONIE.

La fréquence maximum ν_m des signaux transmis et le rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ n de la voie de transmission interviennent ainsi dans une large mesure dans la qualité de la transmission. C'est à la suite de l'analyse de cette notion de qualité qu'on parvient à déterminer expérimentalement les valeurs nécessaires des grandeurs physiques entrant en ligne de compte. Ceci a été fait en particulier pour la téléphonie, et les résultats fondamentaux de cette étude sont donnés ci-après.

5.1. **Critères caractéristiques de la qualité d'une transmission téléphonique.**

Ces critères expérimentaux, mesurés par des coefficients appropriés, sont : ***la netteté pour les logatomes et la fidélité de la reproduction***

5.1.1. Netteté pour les logatomes. — On appelle « logatome » un mot sans signification précise composé d'une voyelle comprise entre deux consonnances (consonne ou groupe de consonnes).

La netteté pour les logatomes est déterminée de la manière suivante :

On fait émettre une série de logatomes, devant le microphone, par un opérateur et l'on note les logatomes correctement entendus, dans l'écouteur, par un autre opérateur.

Lorsqu'on veut déterminer la qualité du système de transmission, le microphone et l'écouteur doivent être sans défauts et conformes aux étalons fournis par le Système Fondamental de Référence (SFERT).

Une équipe d'opérateurs est dite « idéale » lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes :

— Elle est composée d'individus normaux au point de vue physiologique et parfaitement entraînés;

— Elle parle avec la « puissance normale vocale pour les essais téléphonométriques ». Cette puissance est à un niveau de 16 dB en dessous de la puissance correspondant à un volume de référence (6 mW) qui sera déterminé plus loin.

Le *coefficient de netteté*, compris entre 0 et 1, représente le pourcentage de sons correctement entendus par une série d'opérateurs idéaux, à la suite d'essais statistiques.

Il doit, en réalité, être multiplié par un coefficient de pratique expérimentale qui tient compte du degré d'entraînement et de l'état physiologique de l'équipe considérée au moment où elle procède à la mesure de la netteté.

5.1.2. Fidélité de la reproduction. — La netteté pour les logatomes est un critère de compréhension de la conversation. Il est normal de

lui adjoindre un autre critère du naturel de la conversation, destiné à savoir dans quelle mesure la conversation permet de connaître l'identification du correspondant et le ton de ses propos.

Ce critère est la fidélité de reproduction.

Le chiffre caractérisant la fidélité de reproduction s'appelle le *taux d'échelons de fréquence*. Ce dernier est obtenu de la manière suivante :

On dispose dans la ligne un filtre passe-haut, sans pertes, dont on fait varier la fréquence de coupure pendant une conversation.

L'opérateur qui écoute indique les instants où il perçoit une variation dans le timbre de la voix de son interlocuteur.

Les fréquences correspondantes forment ainsi un certain nombre d'échelons de fréquence. L'expérience montre qu'une transmission parfaite fournit, en moyenne, 30 échelons de fréquence.

Le taux d'échelons de fréquence est obtenu en divisant par 30 le nombre d'échelons moyens indiqué par des opérateurs idéaux. Ce chiffre, compris entre 0 et 1, est aussi appelé ***coefficient de fidélité de la reproduction.***

5.1.3. INDICE DE QUALITÉ DE TRANSMISSION. — Les deux critères précédents définissent la qualité de la transmission. Celle-ci peut être appréciée au moyen de deux équivalents :

a. L'équivalent de référence. — Par définition, l'équivalent de référence d'un système de transmission à mesurer est l'indication donnée par le Système Fondamental de Références pour la Transmission Téléphonique, lorsque ce dernier système est réglé de manière qu'on obtienne la même impression sonore à la sortie des deux systèmes, la puissance vocale aux extrémités émettrices des deux systèmes étant la même.

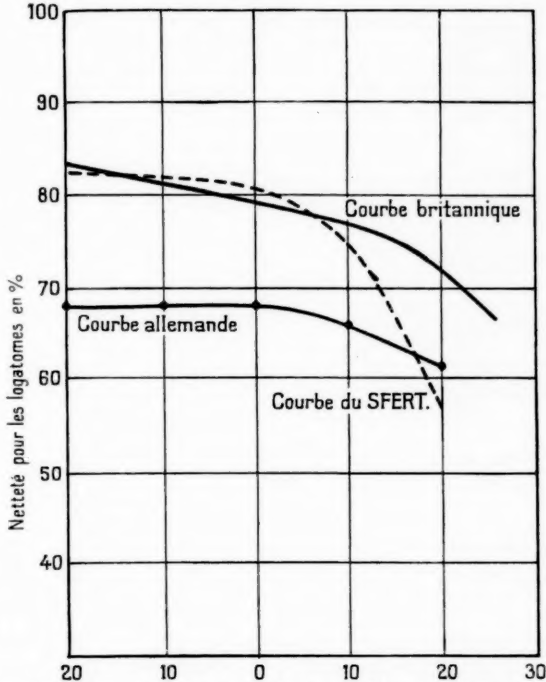
On définit de la même manière, par substitution dans le système de référence, l'équivalent de référence d'une partie du système (émetteur, ligne, récepteur).

L'équivalent de référence est positif si le système est moins efficace que le SFERT et négatif dans le cas contraire.

b. L'équivalent de transmission effective. — C'est l'expression de la qualité de la transmission, basée sur l'observation du taux de répétition (moyenne, pour 100 s, du nombre de répétition de l'un ou l'autre des correspondants). Cet équivalent permet de mesurer l'influence des facteurs défavorables (limitation de la fréquence, bruit) au moyen d'une comparaison entre un système déterminé et le système de référence. On détermine souvent l'influence de ces facteurs par la réduction de l'équivalent de transmission effective appelée « réduction de qualité de transmission ».

5.2. **Effet de la variation de la puissance totale reçue.**

Cet effet est relativement peu marqué. La figure 2 montre la variation du coefficient de netteté en fonction de la puissance de sortie d'un répéteur. On voit



Puissance calculée à la sortie du répéteur exprimée en décibels par rapport à 6 milliwatts

Fig. 2.

que la puissance totale peut varier de près de 20 dB sans introduire une baisse de netteté. La chute de netteté constatée à l'extrémité des courbes est due aux effets de non-linéarité du répéteur pour des puissances relativement importantes.

Mesure de la puissance reçue. — La puissance reçue en un point d'un circuit est mesurée à l'aide d'un *volumètre* ou indicateur de volume. Ce dernier est un voltmètre alternatif associé à un atténuateur étalonné et satisfaisant aux conditions suivantes :

— La graduation est effectuée en unités de transmission (néper ou décibel, un néper vaut 8,7 dB);

— L'addition des diverses composantes de fréquence se fait suivant une loi quadratique dans la bande des fréquences vocales (200 à 3 500 p/s);

— Le *volume de référence*, position 0 de l'appareil, correspond à la tension à 800 périodes aux bornes d'une résistance de 600 Ω dans laquelle est débitée une puissance de 6 mW;

— L'appareil doit avoir une durée d'intégration de 0,2 s, c'est-à-dire qu'au bout du temps de 0,2 s, l'aiguille de l'instrument de mesure atteint un chiffre inférieur de moins de 2 dB au chiffre définitif. Elle ne doit pas non plus dépasser le chiffre de 1 dB de plus que sa position définitive. Ces conditions balistiques sont réalisées avec un amortissement convenable.

Cette durée d'intégration de 0,2 s correspond à la durée d'adaptation de l'oreille humaine à l'intelligence d'un mot.

Elle correspond aussi à la durée moyenne de prononciation d'un logatome.

La mesure du volume s'effectue en modifiant l'atténuateur étalonné gradué de — 50 à + 30 dB, de manière que l'aiguille de l'instrument atteigne, en moyenne une fois toutes les 3 s, le repère de la position 0 de l'appareil. On a vu, plus haut, que le volume normal pour les essais téléphonométriques était obtenu pour la position — 16 dB de l'atténuateur du volumètre.

5.3. Effet de la variation de la puissance reçue en fonction de la fréquence. Courbes équivalent-fréquence.

Cet effet, qui est déterminé par la réponse spectrale de l'oreille, est fortement marqué.

Le coefficient de netteté et surtout le coefficient de fidélité de la reproduction varient beaucoup lorsque l'équivalent de transmission n'est pas le même pour toutes les fréquences vocales.

5.3.1. Effet sur le coefficient de netteté. — Les courbes de la figure 3 indiquent le coefficient de netteté obtenu par le SFERT avec l'emploi d'une ligne idéale et d'un filtre passe-bas et passe-haut. C'est en considération de ces résultats et devant les perfectionnements des microphones et des récepteurs que le C. C. I. F. en 1938 a préconisé la transmission effective (définie par une variation de l'équivalent inférieure à 1 np par rapport à la fréquence 800 périodes) de la bande de fréquence 300-3 400 périodes, clef de voûte des systèmes à courants porteurs. Il faut remarquer d'ailleurs que, si cette bande correspond à un bon coefficient de netteté (on voit sur les courbes qu'il est de l'ordre de 85 %), elle reste relativement peu sévère en ce qui concerne le coefficient de fidélité.

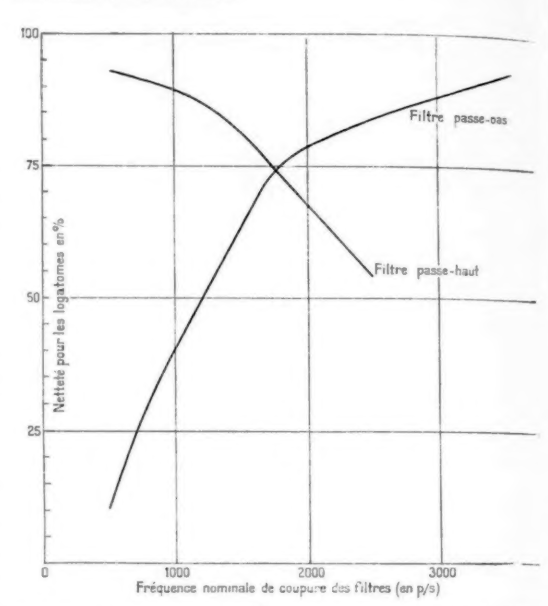


Fig. 3. — Effet de la limitation de la bande des fréquences effectivement transmises sur la netteté pour les logatomes.

5.3.2. Effet sur le coefficient de fidélité. — La figure 4 indique la variation d'échelons perdus

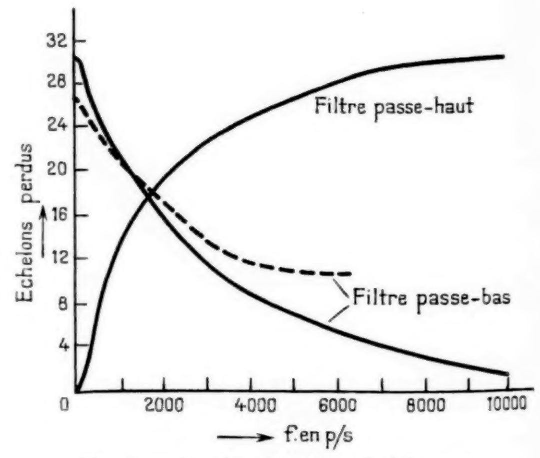


Fig. 4. — Nombre d'échelons de fréquence perceptibles dans différentes transmissions.

dans les mêmes conditions d'expériences que pour la mesure de l'effet sur le coefficient de netteté.

La courbe en trait plein est relative à un appareil téléphonique idéal. La courbe en trait pointillé est relative à des appareils allemands d'un type amélioré.

On voit sur ces courbes que, même dans le cas d'un appareil téléphonique idéal, la bande préconisée par le C. C. I. F. correspond à une perte de trois échelons en basse fréquence et de dix échelons aux fréquences vocales élevées. D'où un coefficient de fidélité de $\frac{17}{30} = 57\ \%$.

5.3.3. COURBE ÉQUIVALENT-FRÉQUENCE. — Aussi le C. C. I. F., dans le cas des transmissions par fil, a jugé nécessaire de préciser la variation de l'équivalent en fonction de la fréquence.

a. Pour les circuits à quatre fils, utilisés en courants vocaux pour les communications à courte distance, l'équivalent doit être compris dans le graphique en échelle de la figure 5.

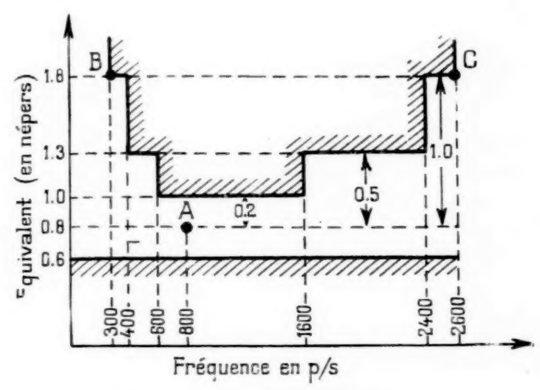


Fig. 5. — Courbe équivalent-fréquence.

C'est cette variation limitée de l'équivalent qui est la plus difficile à satisfaire. C'est elle qui oblige à définir un équivalent nominal à 800 périodes, pour un circuit complet, aussi précis que possible.

Cet équivalent, dans le cas d'un circuit complet à quatre fils, est égal à 0,8 np. On admet qu'il peut varier de $\pm$ 0,2 np.

La forme de la figure 5 simplifie d'ailleurs un peu le problème de la contre-distorsion dans les répéteurs. Toutefois, à cause de la distorsion d'affaiblissement importante entre répéteurs, il est nécessaire que chacun de ces derniers corrige autant que possible la distorsion de la section de câble qui le précède.

Ce sont les filtres des équipements terminaux qui fixent la bande des fréquences effectivement transmises et donnent la forme voulue à la courbe équivalent-fréquence.

b. Pour les câbles coaxiaux, utilisés en courants porteurs dans la plupart des communications à grande distance, le C. C. I. F. recommande une variation limitée de l'équivalent encore plus sévère. La figure 6 donne le gabarit correspondant à la bande 300-3 400 périodes.

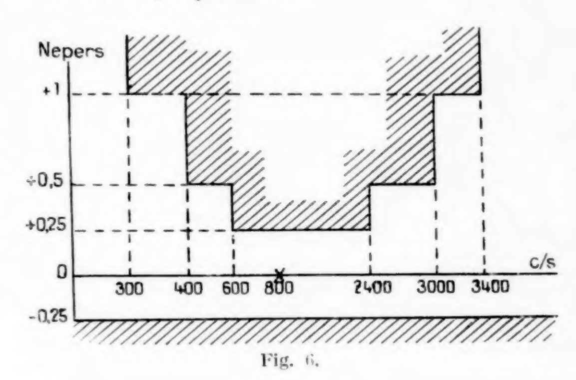


Fig. 6.

5.4. **Influence du bruit de fond.**

5.4.1. MESURE DU BRUIT DE FOND. — Le bruit de fond d'un circuit téléphonique est mesuré à l'aide d'un *psophomètre.* Ce dernier est un voltmètre alternatif possédant les caractéristiques suivantes :

a. La tension totale doit satisfaire à une loi quadratique d'addition des tensions partielles pour chaque fréquence.

b. La graduation doit varier directement sur le cadran de 0,05 à 100 mV.

c. L'impédance d'entrée doit être supérieure à 6 000 Ω.

d. La caractéristique dynamique de l'appareil doit correspondre aux deux conditions suivantes :

— Un bruit d'une durée T supérieure à 0,2 s produit la même déviation δ qu'un bruit continu;

— Un bruit de durée T inférieure à 0,2 s produit une déviation égale à $\frac{\delta T}{200}$ (T est exprimé en millisecondes).

Cette caractéristique est très importante. En effet, de nombreuses sources de bruits (et de nombreuses forces électromotrices de diaphonies) ont une durée inférieure à 0,2 s. Elles ne contribuent qu'accessoirement à la déviation du psophomètre.

Cette caractéristique, comme nous l'avons vu,

est basée sur une série d'observations qui indiquent que la durée de 0,2 s est celle qui semble nécessaire pour que l'oreille humaine apprécie complètement un bruit.

e. Le psophomètre est complété par un réseau filtrant dont la courbe de réponse en fonction des fréquences vocales est donnée par la figure 7. Aucune atténuation notable n'a lieu pour les fréquences comprises entre 800 et 1000 périodes pour lesquelles le psophomètre indique directement la tension d'entrée.

Cette courbe représente, en moyenne, la courbe de sensibilité de l'oreille humaine vis-à-vis d'un bruit de fréquence déterminée.

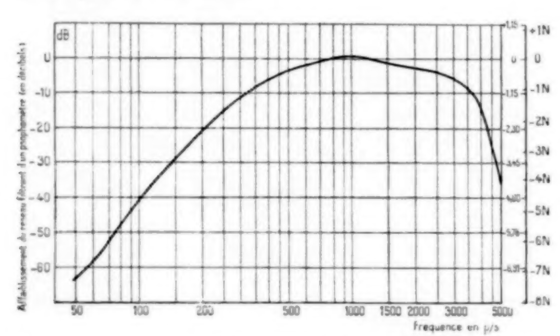


Fig. 7. — Courbe caractéristique du réseau filtrant du psophomètre.

Une application importante de cette courbe réside dans le calcul de la puissance de bruit, en fonction de la tension psophométrique mesurée, dans le cas des systèmes à courants porteurs. On peut admettre, dans ce cas, que le bruit du circuit haute fréquence est uniformément réparti dans la bande des fréquences vocales 300-3 400 p/s.

La puissance de bruit réelle est donc obtenue par le rapport de la puissance de bruit indiquée par le psophomètre avec la valeur moyenne quadratique de l'ordonnée de la courbe de la figure 7, intégrée entre 300 et 3 400 périodes (cette ordonnée étant ramenée à une échelle simple). Cette valeur moyenne est égale à peu près à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que la puissance de bruit indiquée par le psophomètre est inférieure de 3 dB à la puissance de bruit réelle.

5.4.2. Influence du bruit de fond sur la réduction de la qualité de transmission. — Cette influence est caractérisée en déterminant la réduction de la qualité de transmission en fonction de la force électromotrice psophométrique du générateur de bruit équivalent au système de transmission. Cette force électromotrice est égale à la tension psophométrique à 800 périodes lorsque le circuit est ouvert, et au double de celle-ci lorsqu'il est fermé sur une résistance de 600 Ω. Elle est représentée par le tableau suivant, à la suite d'essais effectués au laboratoire du SFERT :

Force électromotrice psophométrique (en mV).	Réduction de la qualité de transmission (en dB).
2,5	0
2,5 à 4	1
4 à 5,5	2
5,5 à 7	3
7 à 8,5	4

Dans ce tableau, la réduction de la qualité de transmission n'est définie, à cause des erreurs d'expérience, que par une série d'échelons variant de 1 dB d'un cas à l'autre.

5.4.3. Conséquences des mesures précédentes sur la limitation du bruit de fond. — Le tableau précédent entraîne deux importantes limitations du bruit de fond.

a. Cas d'une liaison complète. — Le C. C. I. F. admet que la réduction de la qualité de transmission ne peut être supérieure à 2 dB, ce qui représente la variation maximum de l'équivalent de référence.

En conséquence, dans le cas d'une liaison complète, le C. C. I. F. recommande que les bruits de circuits de toute nature, constatés à l'extrémité d'un circuit international, doivent être suffisamment petits pour que la force électromotrice psophométrique, mesurée au jack du circuit dans l'exploitation manuelle ou aux bornes du sélecteur dans l'exploitation automatique, soit inférieure à 5 mV.

L'équivalent nominal (très proche de l'équivalent de référence) de la liaison étant de 0,8 np, il en résulte que le rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ est donc égal à

$$n = \frac{1,55\,\mathrm{e}^{-0,8}}{5.10^{-3}}, \qquad \text{soit} \quad 42,1\ \text{dB}.$$

Remarques. — Le coefficient 1,55 représente la force électromotrice du générateur normal. Il est entendu, pour la définition du rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$, que le bruit est mesuré à un niveau relatif de — 0,8 np et que la source employée est le générateur normal (le niveau — 0,8 np est donc un niveau absolu).

La définition $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ est la définition « télépho-

nique », c'est-à-dire le rapport de la tension du signal à la tension psophométrique (pondérée). Ce rapport est aussi égal au rapport de la force électromotrice du signal à la force électromotrice psophométrique à 800 périodes, par définition de celle-ci.

Si l'on prend la définition « radio », c'est-à-dire le rapport des puissances dissipées, les tensions parasites ne sont pas pondérées et, dans cette définition, nous avons vu que le rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$, dans le cas des courants porteurs lorsque le bruit est uniformément réparti dans le spectre des fréquences vocales de chaque voie, était diminué de 3 dB.

Il est donc alors de 39 dB.

b. Cas du circuit fictif de référence. — On sait que le C. C. I. F. a défini un circuit fictif de référence sur paires coaxiales.

Ce circuit a été défini pour permettre de coordonner les différentes spécifications concernant les parties constitutives d'un système de téléphonie multiple à courants porteurs sur paires coaxiales, afin que les circuits téléphoniques complets établis sur ce système satisfaissent aux normes du C. C. I. F.

Ce circuit fictif de référence a une longueur de 2 500 km et il est établi pour un système à courants porteurs comportant 250 répéteurs dans chaque sens de transmission.

Il comporte au total :

— 3 couples de modulation de voie translatant la bande des fréquences vocales dans le groupe primaire de base et *vice versa*;

— 6 couples de modulation de groupes primaires translatant un groupe primaire de base en un groupe secondaire de base;

— 9 couples de modulation de groupes secondaires translatant le groupe secondaire de base dans l'un quelconque des autres groupes secondaires.

C'est à ce circuit fictif de référence que doivent être assimilés, en principe, les câbles hertziens tout au moins dans le cas des systèmes où l'onde haute fréquence sert de support à un système de distribution par courants porteurs.

Dans le cas du circuit fictif de référence, le C.C.I.F. recommande qu'aucune réduction de la qualité de transmission ne soit réalisée par la présence du bruit (échelon 0 du tableau).

En conséquence, il préconise que le bruit de circuit total (y compris la diaphonie de non-linéarité) ne doit pas dépasser la valeur correspondant à 2 mV, au point de niveau relatif — 0,8 np.

Comme il a été vu précédemment, cette valeur correspond à un rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ « téléphonique » égal à

$$n = \frac{1{,}55\,e^{-0{,}8}}{2.10^{-3}}, \qquad \text{soit} \quad 50{,}9\,\text{dB}$$

et dans le cas où le bruit est uniformément réparti dans le spectre des fréquences vocales de chaque voie, à un rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ « radio » égal à 47,9 dB, ce chiffre pouvant être encore abaissé, comme on l'a vu, si une partie des bruits a des temps de durée inférieurs à 0,2 s.

6. LA TRANSMISSION DES SIGNAUX TÉLÉPHONIQUES EN MULTIPLEX.

Dans les communications multiplex, plusieurs canaux de transmission sont groupés sur un même support physique (ligne coaxiale ou émission radio dans l'atmosphère). L'*onde porteuse véhiculant les signaux d'Information constitue une voie de transmission* caractérisée, comme il a été vu au paragraphe 2.3, page 302, par sa capacité C.

Un premier objectif dans l'établissement d'une liaison multiplex consiste à réaliser l'*équilibrage des différents canaux* de manière à obtenir une vitesse d'Information uniforme.

Cette condition constitue un codage d'adaptation.

Lorsqu'il est réalisé, les symboles élémentaires étant alors équiprobables, la capacité de la voie haute fréquence est donnée par la formule de Hartley, analogue à la formule de Wiener-Tuler

$$C = 2\,\Delta F \log_2\left(1 + \frac{S}{\Delta F k\theta}\right) \quad \text{bits s.} \tag{21}$$

mais où ΔF et S représentent la bande passante et la puissance de l'onde porteuse des signaux d'information.

Théoriquement, la formule (21), comme c'est le cas pour la formule (7), n'est valable que pour un temps de transmission infini; en pratique, seule la variation de ce temps, lorsqu'il reste fini, est gênante dans les systèmes multiplex fonctionnant en hyperfréquence, où elle introduit une diaphonie à spectre triangulaire. Le bruit de diaphonie a la même forme qu'un bruit d'origine thermique et s'ajoute à celui-ci, dans la formule de Hartley, pour diminuer le gain en rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$.

6.1. Rendement d'un système multiplex.

La qualité de la voie de transmission du système

multiplex est concrétisée par le rendement R de celle-ci, défini par le rapport

$$R = \frac{pV}{C};$$

p est le nombre de canaux et V la vitesse d'Information utilisable par canal. Cette définition est toute naturelle puisque nous avons vu (p. 302), que la capacité de la voie correspondait à la vitesse d'Information maximum.

En tenant compte de (20) et de (21), on obtient

$$(22) \qquad R = \frac{pV}{C} = \frac{p\nu_m}{\Delta F} \frac{\log n}{\log\left(1 + \frac{S}{\Delta F k\theta}\right)}.$$

Pour simplifier, posons

$$(23) \qquad u = \frac{\Delta F}{p\nu_m} \quad \text{et} \quad G = u\frac{\Delta F k\theta}{S}.$$

Les coefficients u et G représentent respectivement le *coefficient d'étalement de bande* et le *gain de rapport* $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ du système multiplex par rapport à un système à p canaux distincts pour lequel on aurait

$$u = 1 \quad \text{et} \quad G = 1.$$

La formule (22) devient, avec ces notations,

$$(24) \qquad R = \frac{1}{u} \frac{\log n}{\log\left(1 + \frac{u}{G}\right)}.$$

Le rapport n étant une constante ne dépendant que des objectifs de la liaison téléphonique, la formule (24) montre que la bande passante ΔF et le nombre de canaux p les mieux adaptés au système sont obtenus en rendant minimum le produit $u\log\left(1 + \frac{u}{G}\right)$; en général, u et G varient dans le même sens en fonction de ΔF et, par suite, la valeur de la bande passante optimum, du point de vue informationnel de son choix, résulte d'un *compromis* entre l'influence du coefficient d'étalement de bande u et du gain en rapport signal $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ G.

Nous allons déterminer, de ce point de vue, les trois systèmes multiplex les plus employés.

6.2. Détermination du rendement du système multiplex FDM-FM.

C'est un système multiplex formé par des courants porteurs transmis par modulation de fréquence.

L'égalisation des canaux, nécessaire pour obtenir une vitesse d'Information V uniforme, est obtenue par une loi convenable de modulation de la fréquence.

Lorsque le bruit est entièrement d'origine thermique, l'égalisation est obtenue par une modulation uniforme de phase. Par contre, dans les câbles hertziens, on recherche l'égalisation de tous les bruits, y compris les bruits de diaphonie. Dans ces conditions, l'excursion de fréquence ΔF_p pour le canal d'ordre p est donnée par la loi suivante :

$$\Delta F_p = m_0 \nu_m^{(1-f(p))}.$$

où m_0 est indépendant de p et la fonction $f(p)$ est nulle pour $p = 0$ (modulation de phase) et tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque p augmente beaucoup. Cette loi est déterminée empiriquement en modifiant les caractéristiques des réseaux de modulation jusqu'à l'obtention d'une égalisation convenable.

Lorsque celle-ci est réalisée, les coefficients u et G sont donnés par les relations

$$u = 2y\alpha, \qquad G = 12x(p)p^{-1}\alpha^2.$$

Dans ces formules, le facteur 2 dans u provient de l'existence des deux bandes latérales de la porteuse; le facteur y est le facteur de garde introduit par l'imperfection des filtres; il est égal à 1,4 lorsque les fréquences centrales de deux canaux voisins sont séparées de 4 000 cycles. Le coefficient $x(p)$, tabulé par Dixon, tient compte des lois statistiques expérimentales sur la probabilité de charge simultanée des canaux, dans une liaison bilatérale.

Le paramètre α doit être déterminé, en fonction du nombre de canaux, par un compromis entre l'accroissement de u et celui de G. On choisit, en général, dès que le nombre p dépasse la centaine, une valeur numérique α de l'ordre de 3 à 4. Par exemple, dans le multiplex Paris-Lille, pour 240 canaux espacés de 4 kc, on a choisi une valeur α égale à 4, ce qui correspond à une bande passante haute fréquence de $\pm$ 4 Mc.

Le système FDM-FM est ainsi l'*un des plus avantageux* au point de vue de la théorie de l'Information. La bande vidéo est relativement étroite et il présente l'avantage économique important de pouvoir être raccordé sans démodulation aux baies de courants porteurs préexistantes.

Par contre, le système est très délicat et les défauts de transmission se traduisent très vite par de la diaphonie.

6.3. Détermination du rendement des systèmes multiplex à impulsion.

On se bornera à l'étude des deux systèmes les plus intéressants au point de vue de la théorie de l'Information.

a. Dans le système PAM-FM, formé par des impulsions modulées en amplitude par le signal vocal et transmises par modulation de fréquence, on admet, depuis les travaux de Landon, pour des impulsions en forme de courbe de Gauss, une fréquence de répétition égale à

$$f_r = 3p\nu_m.$$

De plus, pour obtenir un écart diaphonique suffisant, la largeur des impulsions n'est qu'une fraction k de la période de répétition.

Dans ces conditions, le coefficient d'étalement de bande est donné par la formule

$$u = \frac{3}{k}.$$

Le gain G est déterminé en admettant que le récepteur n'est débloqué que pendant les impulsions, ce qui supprime le bruit entre celles-ci. On obtient alors une valeur du gain égale à $G = \frac{2{,}5}{p}$ compte tenu de la valeur de $k = \frac{1}{2}$ pour les systèmes PAM.

On voit ainsi, puisque u demeure indépendant de p, que le rendement décroît lorsque le nombre de canaux augmente.

Ce système est donc intéressant pour des liaisons mobiles, sans raccord préalable avec les baies à courants porteurs, ainsi que pour des liaisons fixes à nombre de canaux modéré. C'est, en effet, le système le plus simple à construire et celui qui utilise le moins de lampes par canal.

b. Dans le système PPM-AM, formé par des impulsions modulées en position par le signal vocal et transmise par modulation d'amplitude, on admet encore une fréquence de répétition des impulsions égale à $f_r = 3p\nu_m$.

Toutefois, la fraction k est alors plus petite et prise égale à $\frac{1}{12}$. Le gain G est déterminé en admettant qu'on ait effectué, lors de la réception, un découpage au point de pente maximum de l'impulsion, de façon à supprimer le bruit aussi bien dans la période de crête que dans la période séparant deux impulsions voisines.

On obtient alors une valeur du gain égale à

$$G = \frac{55}{p}.$$

Comme pour le système précédent, le rendement diminue quand le nombre de canaux augmente. La bande vidéo est six fois plus grande que pour le système PAM, mais le gain G est amélioré d'environ 13 dB.

Aussi ce système est-il très utilisé d'autant plus que la distorsion peut être rendue très faible, les impulsions restant toujours identiques. Enfin, en ondes centimétriques, il permet d'engendrer la porteuse par des magnétrons dont la puissance de crête peut être rendue très élevée.

7. LA TRANSMISSION DES SIGNAUX DE VISION.

Nous allons maintenant examiner, du point de vue informationnel, le cas des signaux visuels en nous cantonnant au domaine de la télévision considérée comme élément de distraction.

On sait que tous les procédés de télévision font appel à l'analyse de l'image, c'est-à-dire que la répartition des brillances ou des teintes des divers objets de l'image est remplacée par une répartition dans le temps.

Toutefois, à la différence des signaux vocaux, il *est impossible de supposer entièrement aléatoires* les signaux visuels transmis. La fonction de corrélation dépend en partie des caractéristiques techniques telles que la profondeur de champ ou le « gamma » des caméras de prise de vue. Elle est déterminée essentiellement, toutefois, par la proportion plus ou moins importante de signaux identiques, provenant des images fixes et transmis à la cadence du balayage d'image.

Dans ces conditions, la formule (22) ne peut s'appliquer à la transmission du signal visuel; le rendement de la voie de transmission est alors essentiellement déterminé par la redondance de la source de symboles émis.

La valeur de la redondance des images à transmettre dépend, en grande partie, des effets scéniques recherchés. Elle est toujours très voisine de l'unité et la vitesse d'information utilisable d'une image de télévision est très fortement réduite par la corrélation entre les signaux successifs et la faible quantité d'information provenant des images floues.

Dans ces conditions, la technique actuellement employée d'un balayage uniforme conduit à un énorme gaspillage de temps et, par suite, à une vitesse moyenne d'information beaucoup trop faible si l'on considère le gaspillage du spectre de fréquence réalisé.

Aussi, de nombreux chercheurs ont-ils proposé différentes solutions permettant la diminution de ce spectre.

7.1. Transmission de la différentielle du signal.

On peut, par exemple, concevoir un tube transmetteur qui fournirait toujours la même image tant qu'un signal correcteur ne viendrait pas rectifier les

images mobiles. Il est nécessaire, pour cela, de placer, à la suite du tube analyseur, un dispositif à mémoire permettant de comparer les signaux entre chaque période du balayage vertical.

Un tel dispositif a été imaginé par M. Barthélemy en 1949, sous le nom de sélecteur à électrons lents pour la suppression des échos fixes dans les radars. Il permettrait en télévision de ne transmettre que la différentielle du signal et éviterait ainsi la répétition trop fréquente du signal provenant des images fixes. Le signal visuel se présenterait alors sous la forme d'impulsions et il est possible, si la répartition statistique correspond à une diaphonie admissible, que ce système puisse fonctionner comme un multiplex à impulsions à plusieurs canaux.

7.2. Utilisation de la technique du « flou-net ».

Un deuxième procédé est basé sur l'intérêt psychologique d'une image floue-nette dont on connaît l'exploitation, peut-être un peu abusive, effectuée dans les expositions de photographies artistiques.

Il consiste à présenter au spectateur, simultanément ou successivement pendant $1/25^e$ de seconde, une image nette et une image floue avec un rapport des brillances ou des temps d'exposition de ces deux images convenablement dosés.

On peut, par exemple, partager le signal entre deux voies et filtrer les hautes fréquences dans l'une d'elles avant recombinaison. On peut aussi, dans le système classique à lignes intercalées, utiliser, pour les lignes impaires, une vitesse de balayage plus élevée que celle des lignes paires.

En gardant un nombre de lignes et une cadence du balayage vertical identiques, on augmente la période de balayage des lignes paires transmises avec netteté et l'on peut réduire en conséquence la bande passante de la voie de transmission.

Ce procédé a été employé par la Radio Corporation of America pour le signal de chrominance des images en couleur.

7.3. Utilisation de la courbe de directivité de l'œil.

Enfin, on peut concevoir un troisième procédé qui exploiterait la propriété des organes de la vue de réaliser un pouvoir séparateur différent suivant la direction d'un objet situé à l'intérieur du champ visuel.

On sait, en effet, que le pouvoir séparateur vis-à-vis de la brillance, de l'ordre de une minute lorsque l'image se fait sur la tache jaune de la rétine, décroît considérablement à l'extrémité du champ de visée bioculaire. Cette courbe de directivité des organes de la vue, bien qu'elle soit en grande partie subjective, peut permettre l'utilisation d'une *vitesse de balayage variable*, ralentie dans une zone choisie *a priori* par l'opérateur de prise de vue pour son intérêt.

De même que dans le cas précédent, on peut réduire en conséquence la bande passante, en gardant un nombre de lignes et une cadence d'images identiques, par une augmentation corrélative de la vitesse de balayage dans les zones de moindre intérêt.

La principale difficulté technique consiste à transmettre un signal de synchronisation spécial effectué, à un instant choisi, pendant la période de balayage de ligne.

Le rendement de la voie de transmission, si cette difficulté est vaincue, est alors augmenté grâce à l'effet de relief psychologique, provoqué chez le spectateur suivant un processus bien connu en photographie et utilisé, par exemple, pour les portraits ou les courses de chevaux dans le but d'attirer l'attention sur le sujet choisi.

8. CONCLUSION.

Quel que soit l'intérêt de ces formes particulières de signaux visuels, ils n'ont pu toutefois être exploités, par suite de la conjoncture économique actuelle.

Les conditions techniques qui régentent la fabrication des récepteurs sont, en effet, tributaires de certaines contingences introduites par la perspective commerciale du marché. L'exemple qui illustre le mieux cet état d'esprit réside dans le choix du système de télévision en couleurs du Comité National de Télévision Américain (N. T. S. C.), déterminé essentiellement par la nécessité de recevoir les signaux de couleurs dans les récepteurs monochromes et réciproquement.

Toutefois, dans le milieu si mouvant où évolue la société actuelle, la conjoncture politique et, par suite, économique, peut subir de profondes transformations dans un délai plus ou moins bref.

Il est d'ailleurs plaisant de souligner que l'étude de l'Information, dont nous venons de présenter ici l'un de ses aspects techniques, contient en son sein les éléments qui doivent permettre de raccourcir ces délais; ceci, dans la mesure où elle pourra être adaptée à une certaine forme de prévision et de conduite de la politique qui restera toujours la science humaine par excellence.

Même dans les circonstances actuelles, pour les problèmes de transmission de signaux vocaux ou visuels, la théorie de l'Information constitue, par la rigueur de sa forme de raisonnement, le fil directeur qui doit toujours guider les techniciens vers la recherche des meilleures solutions.

DUPLEXEUR A LARGE BANDE POUR AÉRIENS SUR ONDES DÉCIMÉTRIQUES ([1])

PAR P. BOUVIER.

Service « Multiplex » de la Société Française Radioélectrique.

SOMMAIRE. — *Après un exposé des avantages d'ordre tactique apportés par l'emploi d'un duplexeur d'aérien aux liaisons hertziennes multiplex à usage militaire, l'auteur définit les qualités exigibles d'un tel appareillage du point de vue de la commodité d'exploitation et des performances électriques.*

Un duplexeur à large bande étudié par la Société Française Radioélectrique, à la demande du Service Technique des Télécommunications de l'Air est ensuite décrit. Ce duplexeur, constitué par des filtres passe-haut et passe-bas, ne nécessite pas de réglage dans la gamme d'utilisation. Quelques résultats expérimentaux sont présentés ainsi que des calculs effectués au cours de l'étude, il est fait notamment une évaluation des tolérances de fabrication propre à assurer une bonne reproductibilité de construction. (C. D. U. : 621.396.65.)

SUMMARY. — *Having set out the tactical advantages arising from the use of an aerial duplexer to multiplex radio links for military use, the author defines the qualities which such an equipment must possess from the point of view of ease of operation and of electrical performance.*

A wide-band duplexer developed by the Societe Francaise Radioelectrique, at the request of the Air Telecommunications Technical Service, is then described. This duplexer, consisting of high-pass and low-pass filters, requires no adjustment in the utilisation band. Some experimental results are given, together with calculations made in the course of the study. In particular, production tolerances appropriate for good reproductibility are evaluated. (U. D. C. : 621.396.65.)

1. INTRODUCTION.

Les liaisons hertziennes établies à partir de l'ensemble multiplex semi-fixe à impulsions MX. 620 réalisé par la Société Française Radioélectrique [1], nécessitaient à l'origine, par station terminale ou demi-station relais, l'emploi de deux aériens paraboliques affectés l'un à l'émetteur, l'autre au récepteur.

L'adjonction d'un duplexeur à ce matériel assure maintenant le fonctionnement simultané de l'émission et de la réception avec aérien et feeder uniques, ce qui constitue un important progrès, particulièrement dans les usages militaires, car cela permet de bénéficier :

— d'un gain de temps de montage et de pointage des aériens lors des mises en station;

— d'une plus grande facilité de transport, les pylônes employés pouvant être plus légers;

— d'une vulnérabilité moindre.

Il est par ailleurs normal de considérer que le remplacement de deux aériens par un duplexeur et un aérien ne doit pas se traduire par des difficultés d'emploi ou par une dégradation de qualité des liaisons hertziennes. Cette remarque permet d'énoncer,

---

([1]) Manuscrit reçu le 11 juin 1957.

dans le cas du multiplex MX. 620, les performances qu'il convenait d'exiger du duplexeur.

— faible encombrement;

— maintien de la rapidité des réglages de l'émetteur et du récepteur dans la gamme 1700-2300 Mc/s;

— découplage émission-réception inchangé, équivalent à celui fourni normalement par deux antennes, soit 70 dB;

— faible taux d'ondes stationnaires (T.O.S. ≤ 1,5) pour ne pas perturber le fonctionnement de l'auto-oscillateur d'émission;

— perte de transmission aussi faible que possible.

2. PARTICULARITÉS TECHNIQUES DU DUPLEXEUR.

2.1. Principe.

L'aiguillage de l'onde émise et de l'onde reçue est assuré d'une manière classique (*cf.* [2], [3]) grâce

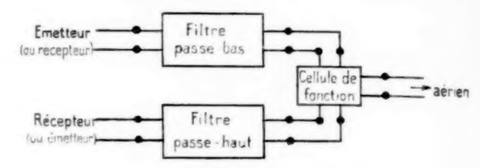


Fig. 1. — Principe du duplexeur.

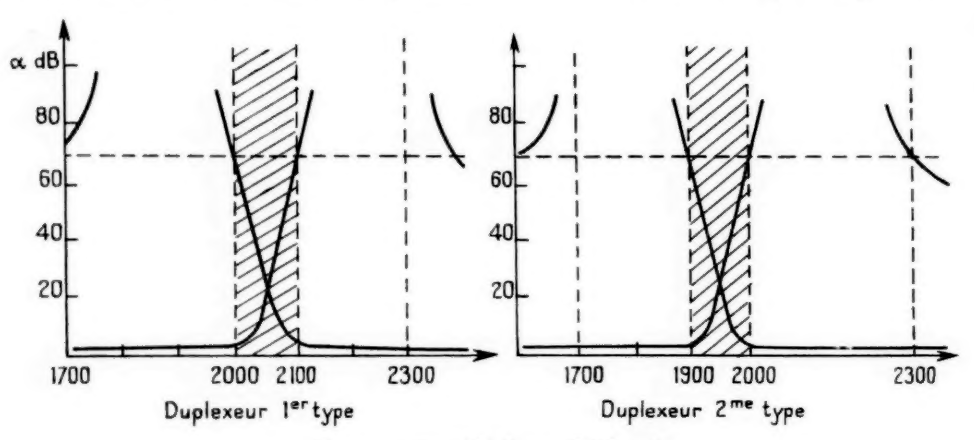


Fig. 2. — Caractéristiques d'atténuation.

Cet ensemble de conditions a pu être respecté dans le duplexeur réalisé par la Société Française Radioélectrique grâce aux dispositions ci-après :

a. séparation émission-réception réalisée par des filtres passe-haut et passe-bas fixes, ce qui élimine tout réglage de la part de l'exploitant;

b. utilisation pour ces filtres de cellules élémentaires *identiques* conduisant à des formes géométriques simples tout en assurant la simplification de l'adaptation d'impédance;

c. remplacement systématique des lignes coaxiales par des lignes à plans parallèles permettant un usinage plus précis;

d. étude des tolérances de fabrication propres à assurer la constance des performances lors de la construction en série.

Ces quatre points seront examinés en détail dans les chapitres suivants.

à deux filtres complémentaires passe-haut et passe-bas, suivant l'arrangement de la figure 1. La bande passante d'un des filtres coïncidant avec la bande atténuée de l'autre, il suffit, pour assurer le « duplexage », d'attribuer à l'émetteur la moitié inférieure de la gamme de fréquences, et au récepteur la moitié supérieure (la station opposée prenant naturellement une disposition inverse).

Une étroite bande de fréquences inutilisable correspondant à la « montée » de l'atténuation des deux filtres est l'inconvénient inhérent à ce dispositif. La difficulté a pu être aisément tournée en construisant deux duplexeurs possédant des bandes interdites convenablement décalées de manière à ce que l'emploi de l'un ou de l'autre permette d'utiliser la totalité de la gamme 1 700-2 300 Mc/s couverte par le multiplex MX. 620 (*fig.* 2).

2.2. Cellule de base des filtres.

Les cellules de base — dont l'association en cas-

cade permet d'obtenir les caractéristiques de filtrage recherchées — ont la forme d'un T dont la branche horizontale serait une ligne de transmission et la branche verticale une ligne résonnante ouverte ou court-circuitée en bout.

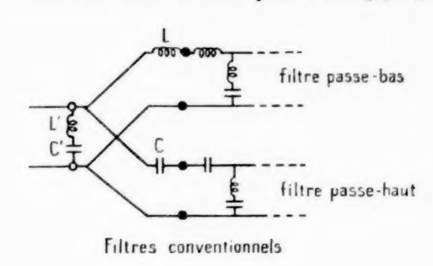
La figure 3 montre qu'autour de la fréquence d'atténuation infinie correspondant à une résonance de la ligne shunt, il apparaît deux bandes passantes à fréquence de coupure f_{c_1} et f_{c_2}. Par un choix judicieux des dimensions, et principalement de la longueur l_1, il est possible de favoriser l'une ou l'autre bande et d'obtenir finalement des courbes ressemblant étroitement à celles des cellules dérivées *m* passe-haut (pour l_1 voisin de $0{,}35\,\lambda_{c_2}$) ou passe-bas (pour l_1 voisin de $0{,}12\,\lambda_{c_1}$) classiques.

Fig. 3. — Cellule en T coaxiale.

2.3. Jonction des deux filtres.

Les deux filtres étant connectés en parallèle sur la sortie « aérien », il est nécessaire d'adjoindre à la jonction une cellule spéciale capable de réaliser l'adaptation d'impédances dans la bande passante des deux filtres.

La technique employée est dérivée de celle utilisée pour les filtres à constantes localisées [2]; c'est-à-dire que chacun des filtres est terminé par une cellule particulière constituée par un élément série de ligne, identique à celui de la cellule terminale d'entrée. Une cellule résonnante commune est placée à la jonction et permet d'achever l'adaptation dans les deux bandes passantes (*fig.* 4).



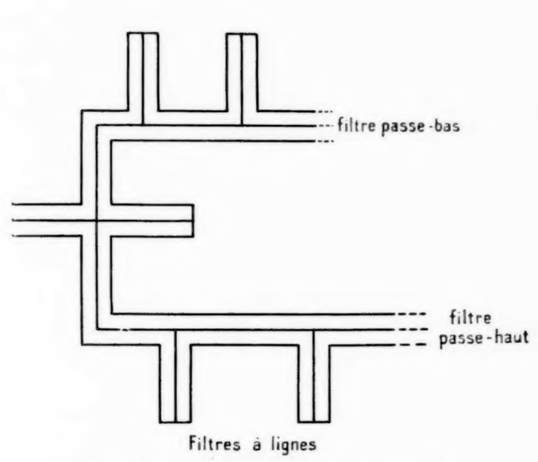


Fig. 4. — Jonction en parallèle des filtres.

2.4. Lignes à plans parallèles.

La réalisation sous forme coaxiale de l'ensemble du duplexeur aurait conduit à de grosses difficultés de fabrication, en particulier pour l'usinage des conducteurs extérieurs et le montage des conducteurs centraux. Une bonne simplification a été acquise par l'emploi de lignes « à plans parallèles » [5] constituées par un conducteur cylindrique blindé par deux plans conducteurs parallèles (*fig.* 5 et 6).

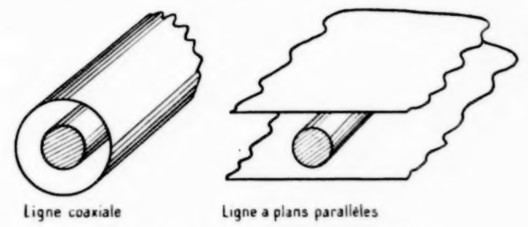


Fig. 5. — Lignes à plans parallèles.

L'emploi de ces lignes à la place des lignes coaxiales pose quelques problèmes particuliers. C'est ainsi que le raccordement aux câbles coaxiaux d'émetteur, de récepteur et d'antenne nécessite l'étude d'une fiche de transition spéciale.

D'autre part, bien que l'énergie transmise reste, en principe, confinée au voisinage immédiat des conducteurs cylindriques, il peut apparaître, si ces conducteurs ne sont pas rigoureusement centrés,

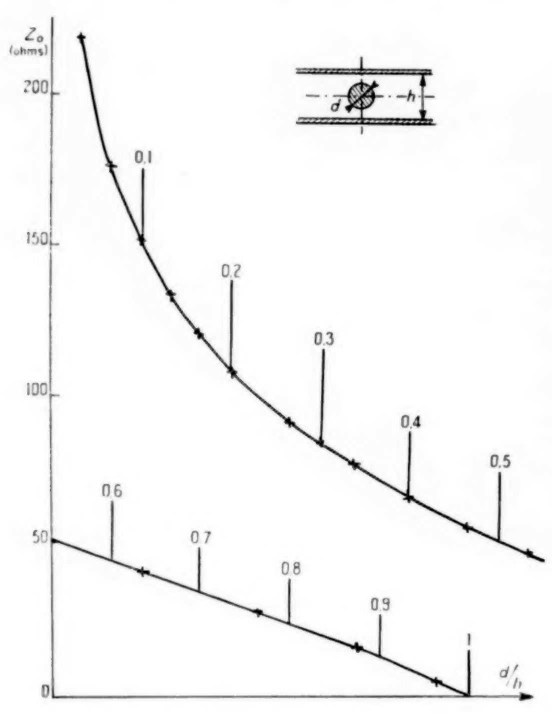


Fig. 6. — Impédance caractéristique des lignes à plans parallèles.

des composantes non symétriques se propageant entre les deux plans, et créant des résonances parasites. Il est ainsi nécessaire de court-circuiter les deux plans de place en place par des écrans conducteurs.

2.5. Description du duplexeur.

Extérieurement (*fig.* 7), le duplexeur a la forme d'une boîte rectangulaire de 290 × 340 × 20 mm, portant trois fiches coaxiales type N permettant le branchement à l'aérien et aux sorties « émetteur » et « récepteur » de la baie radio MX. 620. Trois amortisseurs permettent sa fixation à proximité de la baie radio.

La figure 8 montre le duplexeur couvercle enlevé. On rencontre, en partant de la fiche (1) en bas à droite le filtre passe-bas avec sa demi-cellule de terminaison, dont la ligne résonnante (4) est accordée en usine par la capacité (5), et ses six cellules centrales identiques dont les lignes résonnantes (6) sont fermées par les plaques de court-circuit (8) et (9).

Les plaques (7) séparant les cellules ont pour

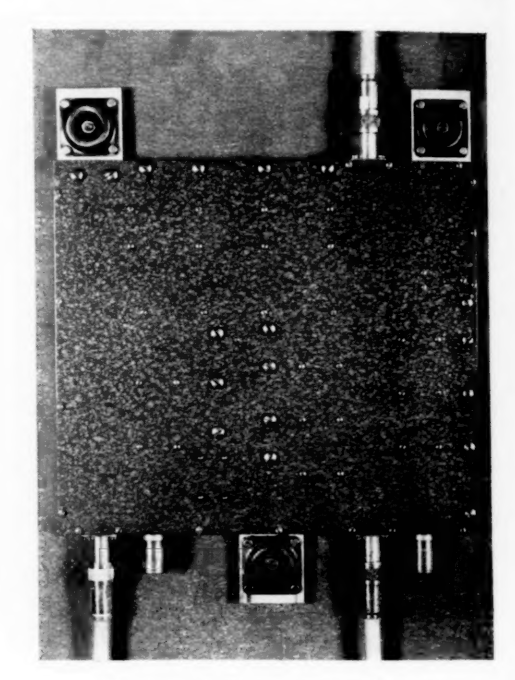


Fig. 7. — Duplexeur vue extérieure.

but d'éviter des résonances parasites entre les éléments.

A la sortie du filtre passe-bas, en haut et à droite, se trouve la cellule de jonction des filtres reliée d'une part à la fiche (2) (sortie aérien) et d'autre part aux filtres passe-haut et passe-bas.

L'adaptation commune des deux filtres au coaxial d'antenne est réalisée par le résonateur (10) et la capacité série (11).

Le filtre passe-haut est disposé en haut et à gauche de l'ensemble. Comme le filtre passe-bas, il est constitué de six cellules centrales, électriquement identiques, et ses lignes résonnantes (12) sont court-circuitées par les plaques (13), (14) et (15).

La cellule (16), en haut, à gauche, est coudée pour réduire l'encombrement global, le plongeur fixe (17)

assurant la compensation de la perturbation due au coude.

En bas et à gauche, le filtre est terminé par une demi-cellule dont la ligne résonnante (18), sur support isolant (19), est accordée en usine par la capacité (20). La fiche coaxiale (3) permet le branchement du filtre passe-haut, au meuble radio.

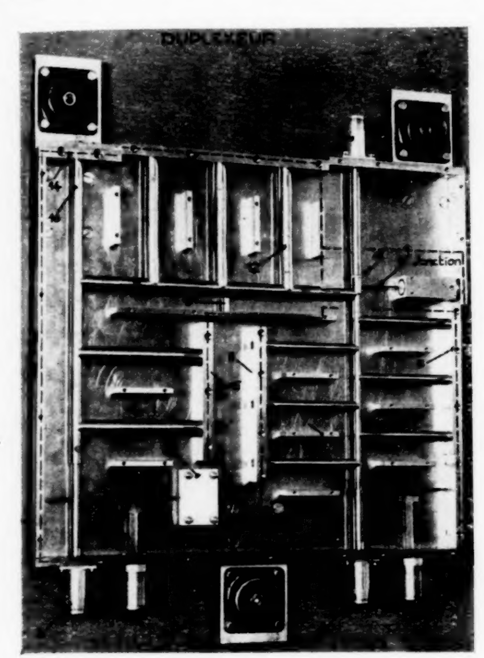


Fig. 8. — Duplexeur vue intérieure.

3. ÉTUDE DU DUPLEXEUR.

3.1. Calcul des paramètres images des cellules à lignes en T.

Les impédances images Z_{i_1} et Z_{i_2} et la constante de transfert Θ qui définissent les propriétés électriques de la cellule de base sont calculées [4] à partir des relations existant entre les tensions et courants d'entrée (E_1, I_1 et les tensions et courants de sortie (E_3, I_3) de la demi-cellule (*fig.* 9 et 10).

On sait que les courants et tensions d'un quadripôle passif sont donnés par les relations linéaires

$$\left\{ \begin{aligned} E_1 &= AE_3 + BI_3, \\ I_1 &= CE_3 + DI_3, \end{aligned} \right. \tag{1}$$

avec

$$AD - BC = 0.$$

Les coefficients A', B', C' et D' de la demi-cellule permettent de déterminer les impédances images Z_{i1}, Z_{i2}, et la constante de transfert Θ,

$$Z_{i1} = \left(\frac{A'B'}{C'D'}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$$Z_{i2} = \left(\frac{B'D'}{C'A'}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

$$\text{ch}\,\Theta = A'D' + B'C' = 2A'D' - 1 = 1 + 2B'C'. \tag{4}$$

Pour un filtre composé uniquement d'éléments réactifs :

$\Theta = \alpha$, atténuation en népers dans la bande atténuée de la cellule complète;

$\Theta = j\varphi$, déphasage dans la bande passante de la cellule complète.

Comme $\text{ch}\,j\varphi = \cos\varphi$, la valeur de $\text{ch}\,\Theta$ dans la bande passante variera de $+1$ à -1, les valeurs ± 1 correspondant aux fréquences de coupure.

Pour calculer les coefficients A', B', C' et D', nous calculerons séparément les relations tension-courant de la susceptance $j\mathcal{B}$ et de la ligne de transmission Z_{01}, $\frac{\Phi_1}{2}$.

Nous avons ainsi pour la susceptance $j\mathcal{B}$:

$$\left\{ \begin{aligned} E_2 &= E_3, \\ I_2 &= \frac{j\mathcal{B}}{2}E_3 + I_3. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

et pour la ligne de transmission :

$$\left\{ \begin{aligned} E_1 &= E_2 \cos\frac{\Phi_1}{2} + jI_2 Z_{01} \sin\frac{\Phi_1}{2}, \\ I_1 &= j\frac{E_2}{Z_{01}} \sin\frac{\Phi_1}{2} + I_2 \cos\frac{\Phi_1}{2}, \end{aligned} \right. \tag{6}$$

en combinant (5) et (6) pour éliminer E_2 et I_2, on trouve des relations de la forme de (1) d'où on tire en identifiant

$$\left\{ \begin{aligned} A' &= \cos\frac{\Phi_1}{2} - \frac{\mathcal{B}Z_{01}}{2}\sin\frac{\Phi_1}{2}, & B' &= jZ_{01}\sin\frac{\Phi_1}{2}, \\ C' &= j\left(\frac{\sin\frac{\Phi_1}{2}}{Z_{01}} + \frac{\mathcal{B}}{2}\cos\frac{\Phi_1}{2}\right), & D' &= \cos\frac{\Phi_1}{2}. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Les paramètres images sont alors :

— d'après (2) et (7) :

$$\frac{Z_{i1}}{Z_{01}} = \left[\frac{1 - \frac{\mathcal{B}Z_{01}}{2}\,\text{tg}\,\frac{\Phi_1}{2}}{1 + \frac{\mathcal{B}Z_{01}}{2}\,\text{cotg}\,\frac{\Phi_1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{8}$$

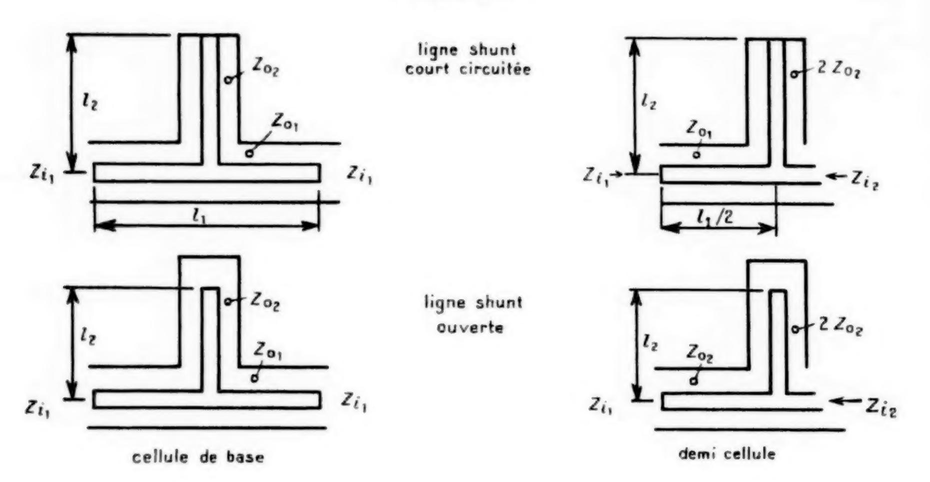
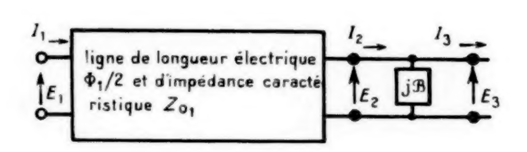


Schéma équivalent de la demi-cellule



$\Phi_1 = \dfrac{2\pi l_1}{\lambda}$

$\mathcal{B}$ = susceptance ramenee par la ligne shunt

$\mathcal{B} = \dfrac{1}{2Z_{o_2}}$ tg Φ_2, dans le cas d'une ligne shunt ouverte

$\mathcal{B} = -\dfrac{1}{2Z_{o_2}}$ cotg Φ_2, dans le cas d'une ligne shunt court-circuitée

$\Phi_2 = \dfrac{2\pi l_2}{\lambda}$

Fig. 9.

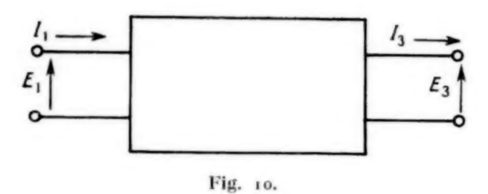


Fig. 10.

— d'après (3) et (7) :

$$(9) \qquad \frac{Z_{i2}}{Z_{01}} = \left[\frac{1}{1 + \mathcal{B} Z_{01} \operatorname{cotg} \Phi_1 - \left(\frac{\mathcal{B} Z_{01}}{2} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}};$$

— et d'après (4) et (7) :

$$(10) \qquad \operatorname{ch} \Theta = \cos \Phi_1 - \frac{\mathcal{B} Z_{01}}{2} \sin \Phi_1.$$

La relation (10) permet de calculer le rapport $\frac{Z_{01}}{Z_{02}}$ à employer lorsqu'on se fixe la fréquence de coupure.

En effet à la fréquence de coupure :

$$\Phi_1 = \Phi_{1c},$$
$$\Phi_2 = \Phi_{2c},$$

$\operatorname{ch} \Theta = -1$ dans le cas des cellules passe-bas,

$\operatorname{ch} \Theta = +1$ » » passe-haut.

Il vient :

a. Filtre passe-bas à ligne shunt ouverte :

$$\operatorname{ch}\Theta = -1 = \cos\Phi_{1c} - \frac{Z_{01}}{2Z_{02}}\,\operatorname{tg}\Phi_{2c}\,\sin\Phi_{1c}$$

et

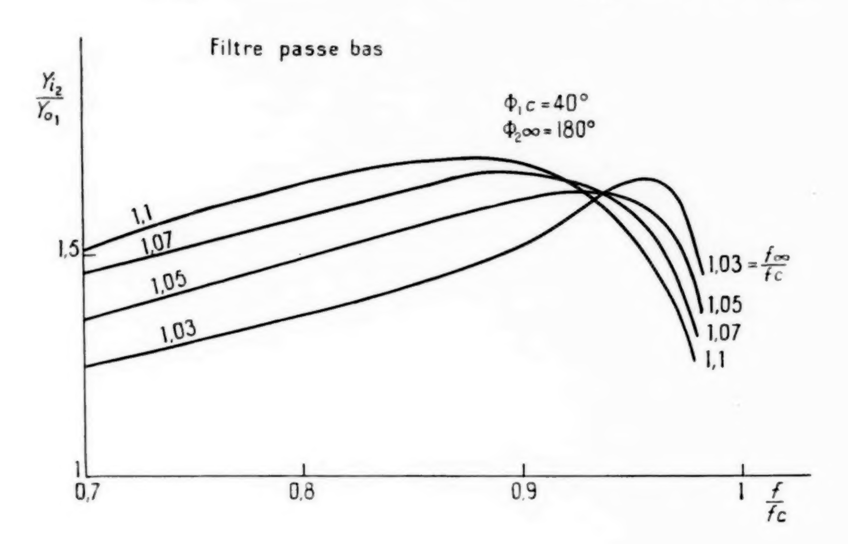
$$(11) \qquad \frac{Z_{01}}{Z_{02}} = 2\,\operatorname{cotg}\frac{\Phi_{1c}}{2}\,\operatorname{cotg}\Phi_{2c}.$$

b. Filtre passe-haut à ligne shunt ouverte. — Il vient de même

$$(12) \qquad \frac{Z_{01}}{Z_{02}} = -2\,\operatorname{tg}\frac{\Phi_{1c}}{2}\,\operatorname{cotg}\Phi_{2c}.$$

c. Filtre passe-bas à ligne shunt court-circuitée :

$$(13) \qquad \frac{Z_{01}}{Z_{02}} = -2\,\operatorname{cogt}\frac{\Phi_{1c}}{2}\,\operatorname{tg}\Phi_{2c}.$$



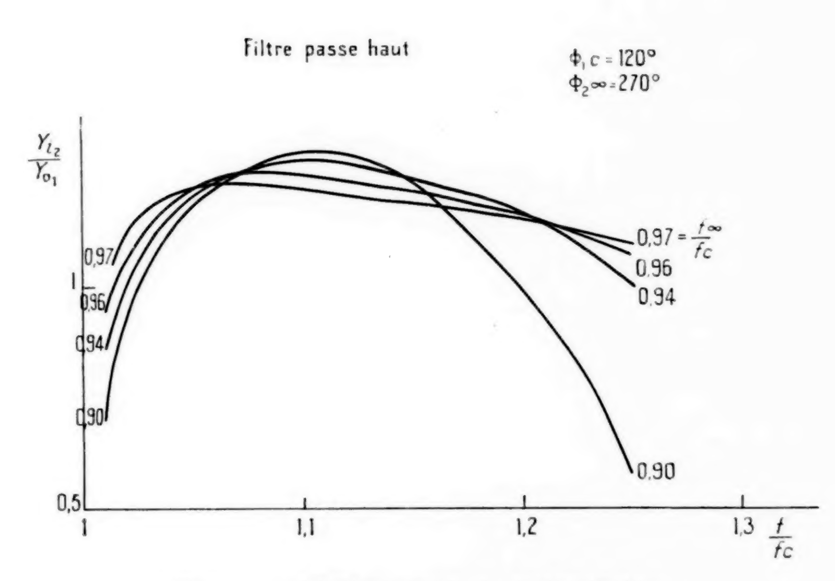


Fig. 11. — Admittance image de demi-terminaison.

d. Filtre passe-haut à ligne shunt court-circuitée :

$$(14) \qquad \frac{Z_{01}}{Z_{02}} = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\Phi_{1c}}{2}\,\mathrm{tg}\,\Phi_{2c}.$$

3.2. Détermination des filtres.

Le projet des filtres a été conduit de la façon suivante :

a. Tracé des abaques de Z_{i_1} et de l'atténuation α des cellules en fonction de la fréquence (*fig.* 11 et 12).

b. Choix de la demi-cellule de terminaison assurant une bonne adaptation dans la bande utile. La nécessité d'aboutir à des impédances caractéristiques Z_{02} réalisables en pratique conduit à employer des cellules à ligne shunt résonnant en $\frac{\lambda}{2}$ ($\Phi_{2\infty} = 180°$) pour le filtre passe-bas, et en $\frac{3}{4}\lambda$ ($\Phi_{2\infty} = 270°$) pour le filtre passe-haut.

c. Choix des cellules centrales réalisant l'affaiblissement voulu dans la bande atténuée. Cet affaiblissement a pu être obtenu avec six cellules identiques, ce qui aboutit à un ensemble mécaniquement simple. La solution classique qui consistait à utiliser des cellules à fréquences d'affaiblissement infini convenablement décalées aurait permis l'économie d'une cellule (considération qui eut semblé avantageuse dans le cas de filtres à constantes localisées), mais au prix, d'une grande complexité de structure, donc d'une réalisation mécanique délicate.

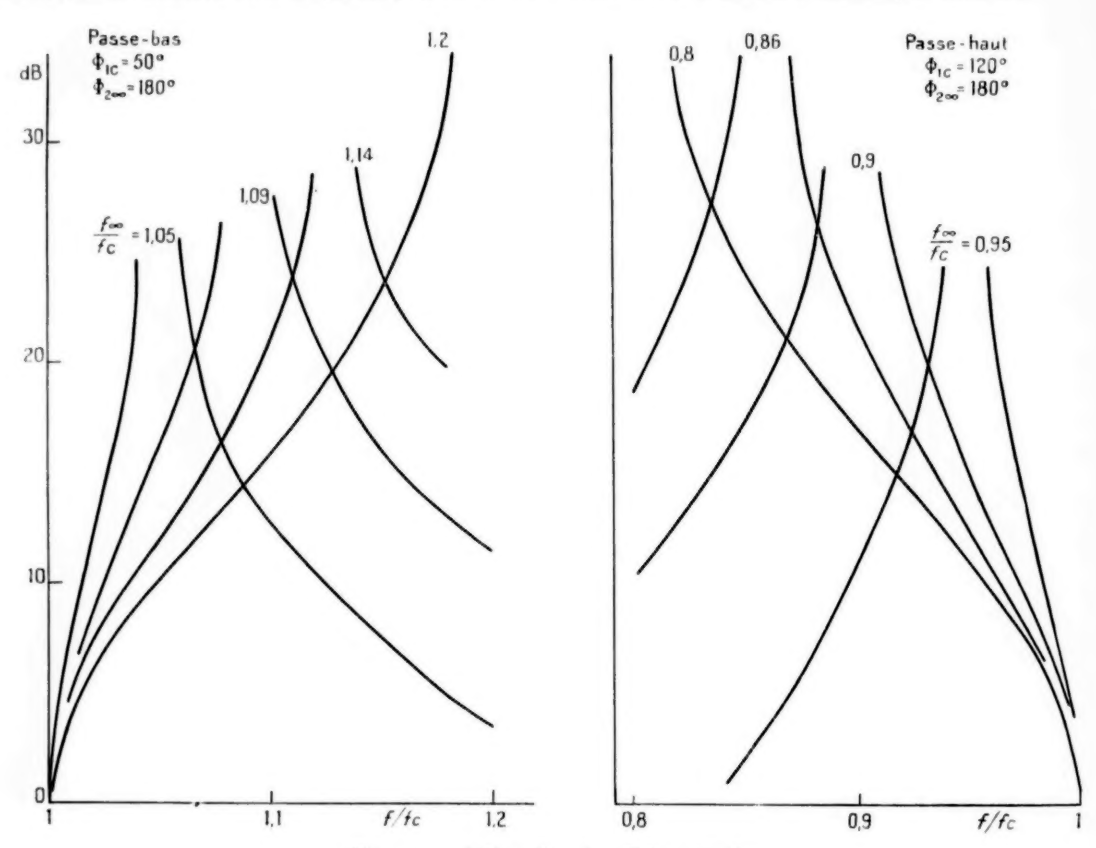


Fig. 12. — Atténuation de cellules centrales.

d. Adaptation des impédances images des cellules. On l'obtient en superposant les courbes de Z_{i_1} par l'ajustement des niveaux d'impédances et éventuellement par un léger décalage des fréquences de coupure. L'adoption de cellules identiques a naturellement permis d'éliminer les défauts d'adaptation entre cellules centrales.

La disposition finalement adoptée est résumée dans le tableau ci-après.

Paramètres de la branche passe-bas.

Cellules.....		Demi-terminaison.	Centrales.
Nombre		1	6
$\Phi_{2\infty}$ (°)		180	180
Φ_{1c} (°)		40	50
Z_{01} (Ω)		75	75
Z_{02} (Ω)		82,5	65,3
Duplexeur 1er type	f_c (Mc/s)	2 038	2 038
	f_∞ (Mc/s)	2 150,1	2 221,4
Duplexeur 2e type	f_c (Mc/s)	1 938	1 938
	f_∞ (Mc/s)	2 044,6	2 112,4

Paramètres de la branche passe-haut.

Cellules.....		Demi-terminaison.	Centrales.
Nombre		1	6
$\Phi_{2\infty}$ (°)		270	180
Φ_{1c} (°)		120	120
Z_{01} (Ω)		57,5	44,9
Z_{02} (Ω)		83,5	35,6
Duplexeur 1er type	f_c (Mc/s)	2 060	2 060
	f_∞ (Mc/s)	1 977,6	1 854
Duplexeur 2e type	f_c (Mc/s)	1 960	1 960
	f_∞ (Mc/s)	1 881,6	1 764

3.3. **Mise au point.**

L'étude expérimentale des éléments du duplexeur a été menée de la façon suivante, pour les duplexeurs des deux types.

Les calculs exposés précédemment donnent une bonne approximation des atténuations, par contre l'adaptation, qui doit être très bonne, fait intervenir des grandeurs difficilement accessibles au calcul. En particulier, les discontinuités introduites par les dérivations ou les ruptures de diamètres demandent de corriger les valeurs calculées par des mesures.

3.3.1. Détermination des fiches de transition. — La nécessité de se raccorder à l'appareillage MX. 620, équipé de fiches type N 50 Ω, nous a conduit à étudier tout d'abord la fiche des trois sorties du duplexeur.

Cette fiche doit permettre de passer avec de faibles réflexions de la structure coaxiale des fiches N aux lignes plans parallèles 50 Ω utilisées dans le duplexeur.

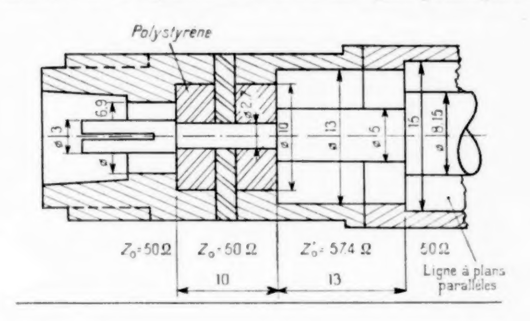
Les réflexions, dues aux discontinuités existant à la jonction coaxial-plans parallèles, ont été compensées suivant la méthode de Ragan [7] par un accroissement de l'impédance caractéristique au niveau de la rondelle isolante centrant la pince de contact de la fiche.

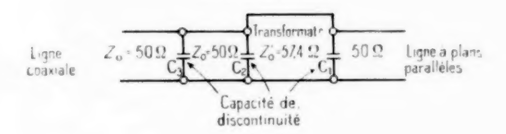
Le croquis de la fiche réalisée, son schéma équivalent, et l'adaptation mesurée dans la bande 1700-2300 Mc/s sont présentés sur la figure 13.

3.3.2. Détermination des longueurs des lignes shunt. — La longueur l_2 de la ligne shunt détermine la fréquence d'atténuation infinie (f_∞) des cellules à lignes en T. Cette fréquence f_∞ correspond à la résonance de la ligne shunt, qui apparaît pour

$$\lambda_\infty = 2 l_2.$$

Pratiquement, la distorsion des champs à la jonction de la ligne shunt et de la ligne principale





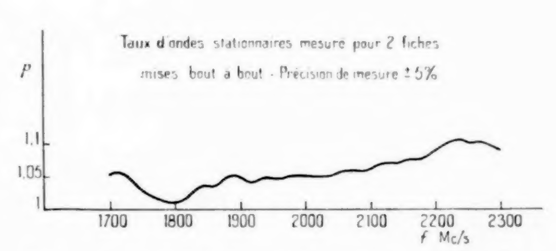


Fig. 13. — Fiches de transition coaxial plans parallèles.

modifie la fréquence de résonance. Pour compenser cet effet, il est nécessaire de choisir la longueur reélle l'_2 différente de $\frac{\lambda_\infty}{2}$.

Les courbes expérimentales (*fig.* 14 et 15) ont permis de déterminer la longueur l'_2 à utiliser, en fonction de la fréquence d'atténuation infinie désirée.

3.3.3. Détermination de la cellule de jonction. — La cellule de jonction a été déterminée suivant les principes exposés au paragraphe 2.3

en tenant compte des mesures effectuées sur les deux filtres complémentaires.

C'est ainsi que la cellule de jonction primitivement prévue a été perfectionnée en ajoutant une capacité série permettant de mieux centrer les impédances des deux filtres autour de 50 Ω.

3.4. Tolérances de fabrication.

Il est utile, pour passer du stade prototype au stade fabrication, de prévoir comment les imperfections de réalisation vont altérer les performances des appareils construits, afin de fixer les tolérances à imposer aux différentes pièces mécaniques constituant les filtres.

Dans le cas du duplexeur, le point le plus critique est l'adaptation au voisinage des frontières de chacun des filtres. Cette condition fait l'objet du calcul suivant, lequel comprend :

a. la recherche des effets de la variation de chaque dimension sur l'admittance d'entrée des filtres;

b. la sommation de ces effets.

Cette étude requiert l'application du calcul des probabilités, car il y a peu de chances que les variations des différents éléments produisent des effets dans le même sens. Additionner arithmétiquement les différents effets conduirait à des résultats pessimistes.

3.4.1. Effets des variations des éléments du filtre sur l'admittance d'entrée. — Le calcul a été appliqué aux seules cellules centrales : nous avons considéré que les mêmes tolérances sont applicables à la cellule de jonction; enfin l'accord de la cellule de terminaison étant fait avec précision au moment du réglage, son influence a été négligée.

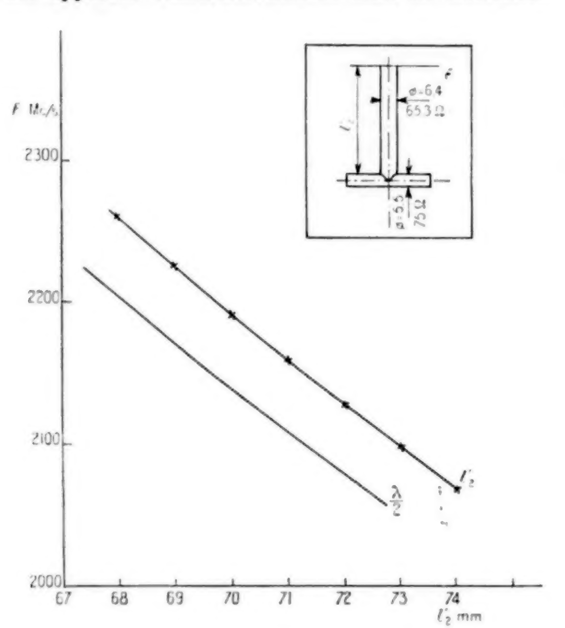


Fig. 14. — Longueur de résonance des lignes des cellules centrales passe-bas.

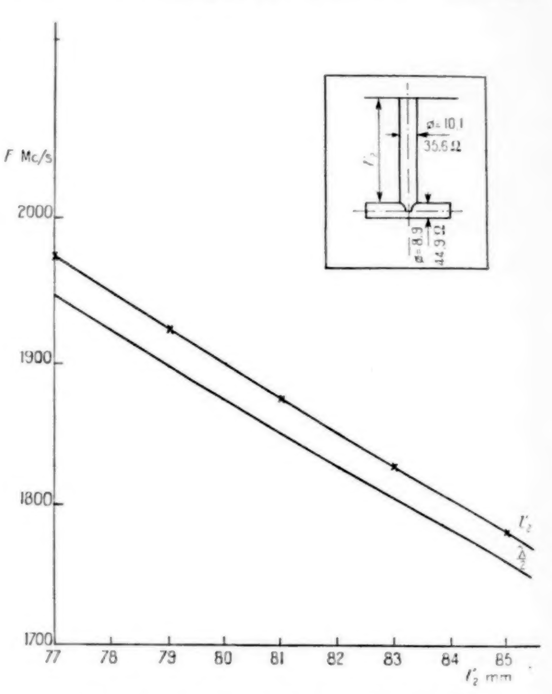


Fig. 15. — Longueur de résonance des lignes des cellules centrales passe-haut.

L'admittance d'entrée Y_e du filtre est une fonction des diverses dimensions géométriques des éléments du filtre

$$Y_e = f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n). \tag{15}$$

Par suite, la variation Z de l'admittance d'entrée en fonction des variations $d\lambda$ des éléments, peut s'écrire

$$Z = \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} d\lambda_i + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} d\lambda_n, \tag{16}$$

$\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ est complexe; en posant $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = w_i e^{j\alpha_i}$, (16) devient

$$Z = \sum w_i e^{j\alpha_i} d\lambda_i. \tag{17}$$

$w_i e^{j\alpha_i}$ est la fonction de poids de la variable λ_i correspondante.

Compte tenu du mode de réalisation du filtre, les grandeurs suivantes (*fig.* 16) ont été considérées :

h_1, écartement des plans conducteurs en regard de la ligne $l_1 d_1$;

h_2, écartement des plans conducteurs en regard de la ligne l_2 d_2;

d_1, diamètre de la ligne de transmission;

d_2, diamètre des lignes résonnantes;

l_1, écartement des lignes résonnantes;

l_2, longueur des lignes résonnantes.

L'admittance d'entrée d'une cellule est facilement calculée à partir de l'équation des lignes et en utilisant l'expression approchée $Z_0 = 60 \operatorname{Log}_e \frac{4h}{\pi d}$ de l'impédance caractéristique de la ligne à plans parallèles.

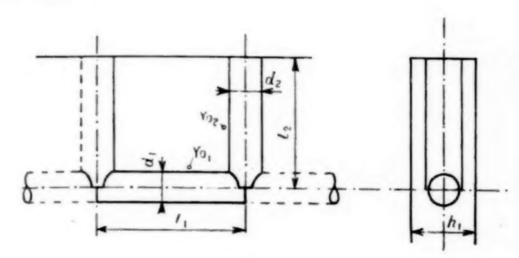


Fig. 16.

Après dérivation on obtient une expression de la forme

$$\Delta Y = (w_1 \Delta d_1 + w_2 \Delta h_1 + w_3 \Delta l_1)\, e^{j\alpha_1} + (w_4 \Delta d_2 + w_5 \Delta h_2 + w^6 \Delta l_2)\, e^{j\alpha_2}. \quad (18)$$

La variation d'admittance à l'entrée du filtre s'obtient en remplaçant α_1 et α_2 dans (18) par $\alpha_1 + 2\varphi$ et $\alpha_2 + 2\varphi$, φ étant le déphasage depuis l'entrée du filtre jusqu'à la cellule considérée. Nous verrons d'ailleurs que la connaissance exacte de ces angles n'est généralement pas nécessaire pour la détermination des tolérances de fabrication.

3.4.2. Évaluation de l'effet statistique. — Fixer des tolérances de fabrication revient à imposer au fabricant un intervalle, $\lambda_0 \pm c$ dans lequel toutes les pièces devront se trouver; λ_0 est la côte nominale et c la tolérance de fabrication. La courbe de distribution des cotes réelles n'est pas connue mais on peut penser *a priori* qu'elle est symétrique, c'est-à-dire que la somme des écarts $\lambda - \lambda_0$ relevés sur un grand nombre d'appareils est nulle. En supposant une courbe de distribution rectangulaire (*fig.* 17), ce qui est généralement un cas défavorable, l'écart quadratique moyen σ est donné par

$$\sigma^2 = \frac{c^2}{3}. \quad (19)$$

Il a été démontré (*cf.* [6]) que si les distributions des éléments sont gaussiennes, ou que le nombre

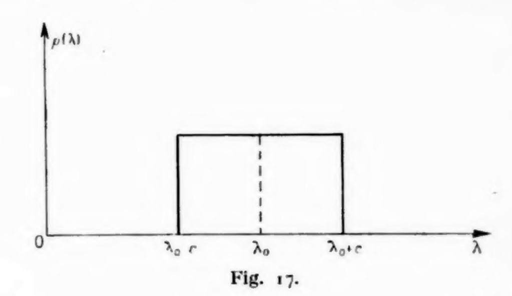


Fig. 17.

de ces éléments est suffisamment grand pour que la forme exacte de leur distribution n'ait plus d'importance :

a. Sur un abaque conductance-susceptance les courbes d'équiprobabilité de l'admittance d'entrée sont représentées par une famille d'ellipses homothétiques, et de mêmes axes (*fig.* 18).

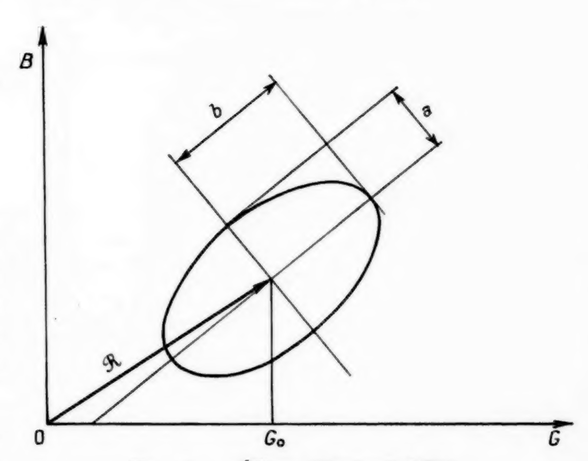


Fig. 18. — Éllipse d'équiprobabilité.

b. La probabilité pour qu'un appareil ait son admittance d'entrée représentée par un point extérieur à une ellipse est donné par

$$\Phi = e^{-\frac{a^2 + b^2}{2S^2}}. \quad (20)$$

Les valeurs à calculer pour déterminer la famille d'ellipses sont les suivantes :

a. La valeur moyenne de la résultante, $\mathcal{R}$. C'est la valeur nominale, c'est-à-dire la valeur de l'admittance d'entrée quand les écarts des éléments sont nuls.

b. L'écart type S. — C'est l'écart moyen quadratique du module de l'admittance d'entrée, donné par

$$S^2 = \overline{|Z|^2} = \sum w_i^2 \sigma_i^2. \tag{21}$$

c. L'excentricité β,

$$\beta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{|\overline{Z^2}|}{S^2}, \tag{22}$$

avec

$$\overline{Z^2} = \sum (w_i \sigma_i)^2 e^{j2\alpha_i}. \tag{23}$$

Pratiquement comme le calcul est le plus souvent fait au voisinage des frontières de la bande passante

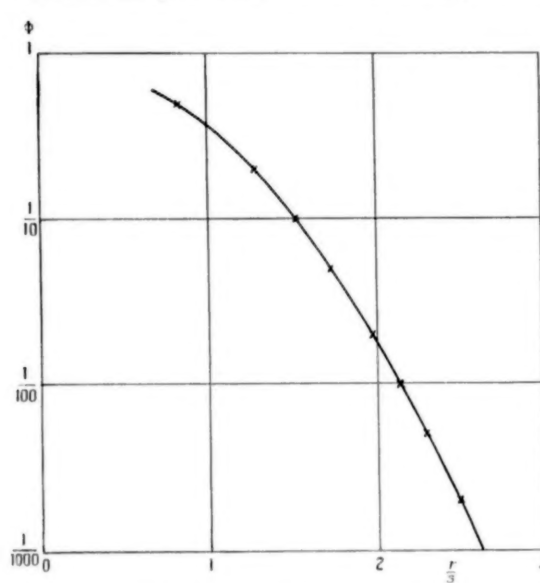


Fig. 19. — Courbe de probabilité d'un écart excédant R en amplitude.

des filtres où le déphasage α est de l'ordre de 130° par cellule, la sommation de (23) montre que $|\overline{Z^2}| \ll S^2$, donc que l'excentricité β est très faible.

Cette remarque permet de simplifier grandement les calculs car il n'est plus nécessaire de déterminer les angles α_i. D'autre part, en posant $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = r^2$, l'équation (20) donne la probabilité pour qu'un appareil ait son admittance d'entrée représentée par un point extérieur à un cercle de rayon r (*fig.* 19).

Il est ainsi possible de définir un « taux d'ondes stationnaires de dispersion », $s_d = \frac{G_0 + r}{G_0}$, G_0 étant la partie réelle de la résultante $\mathcal{R}$.

3.4.3. Application numérique. — *a. Filtre passe-bas à* 2 000 Mc/s :

Éléments..	Précision en 1/100e de millimètre.	$w_i c_i .10^4$.	$(w_i c_i)^2 .10^8$.
$d_1 =$ 5,5 mm...	±1	0,7447	0,5546
$H_1 =$ 15 » ...	5	1,3653	1,864
$d_2 =$ 6,4 » ...	1	0,6807	0,4634
$H_2 =$ 15 » ...	5	1,4521	2,1086
l_1...............	5	1,314	1,7264
l_2...............	5	3,395	11,526
$\sum (w_i c_i)^2$..............		18,243.10^{-8}	

soit pour six cellules :

$$S = 0,578.10^{-4} \sqrt{18,24 \times 6} = 6.10^{-4},$$

ce qui correspond (*fig.* 23) à 99 % des filtres ayant une variation d'admittance au-dessous de

$$|\Delta Y_e| < r = 2,15\,S = 12,9.10^{-4}.$$

Or, la partie réelle de Y_e est

$$\frac{0,9675}{75} = 1,29.10^{-2}.$$

Le T. O. S. de dispersion correspondant sera donc

$$s_d = \frac{1,29.10^{-2} + 12,9.10^{-4}}{1,29.10^{-2}} = 1,11.$$

b. Filtre passe-haut à 2 100 Mc/s :

Éléments.	Précision en 1/100e de millimètre.	$w_i c_i .10^4$.	$(w_i c_i)^2 .10^8$.
$d_1 =$ 8,9 mm......	±1	1,077	1,601
$h_1 =$ 15 »	5	3,186	10,493
$d_2 =$ 10,1 »	1	1,058	1,118
$h_2 =$ 15 »	5	3,561	12,682
l_1..................	5	0,157	0,025
l_2..................	5	0,358	0,125
$\sum (w_i c_i)^2$..............		25,259.10^{-8}	

soit pour six cellules :

$$S = 0,578.10^{-4} \sqrt{25,259 \times 6} = 7,11.10^{-4}.$$

ce qui correspond (*fig.* 23) à 99 % des filtres ayant une variation d'admittance d'entrée inférieure à

$$|\Delta Y_e| < r = 2,15 S = 15,28.10^{-4}.$$

La partie réelle de Y_e étant

$$\frac{0,8799}{45,9} = 1,96.10^{-2} \text{ (mho)},$$

Remarque. — A ces désadaptations viennent s'ajouter celles dues :

a. à l'erreur systématique d'impédance image des cellules de terminaison et de jonction;

b. aux fiches de transition.

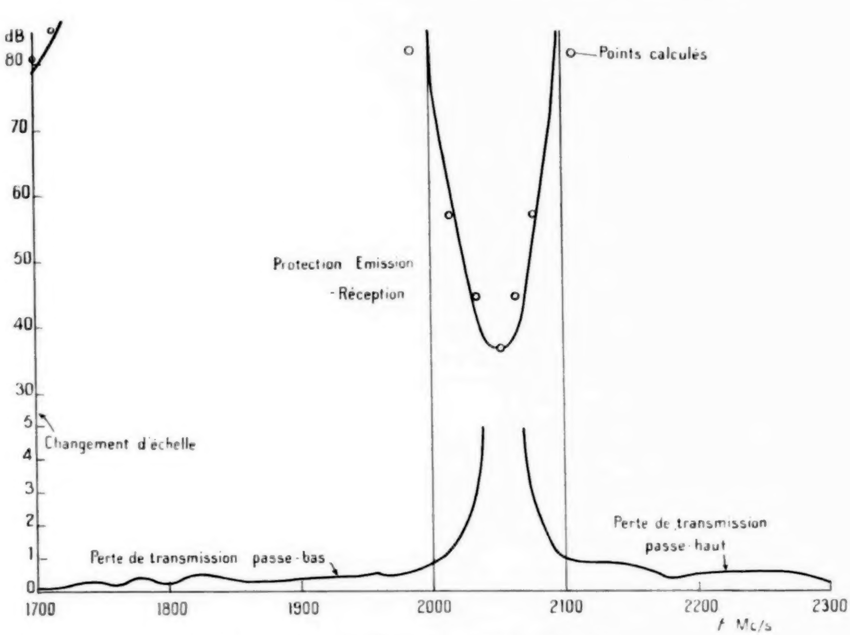


Fig. 20. — Duplexeur 1er type, atténuation.

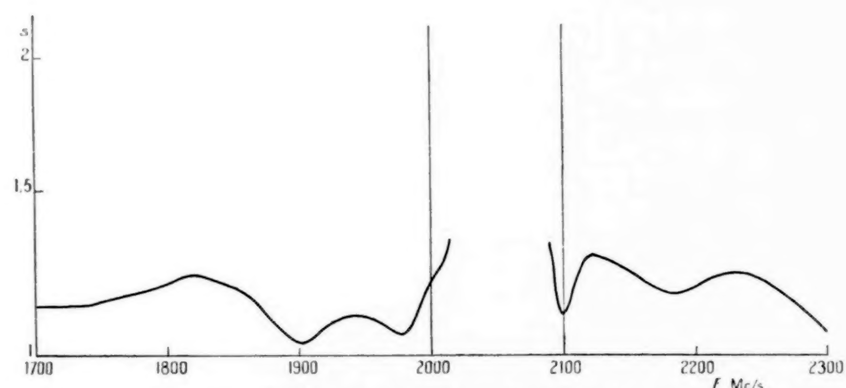


Fig. 21. — Duplexeur 1er type, taux d'ondes stationnaires.

le T. O. S. de dispersion correspondant est

$$s_d = \frac{1,96.10^{-2} + 15,28.10^{-4}}{1,96.10^{-2}} = 1,08.$$

4. CONCLUSION.

La protection émission-réception, le taux d'ondes stationnaires, et la perte de transmission, relevés

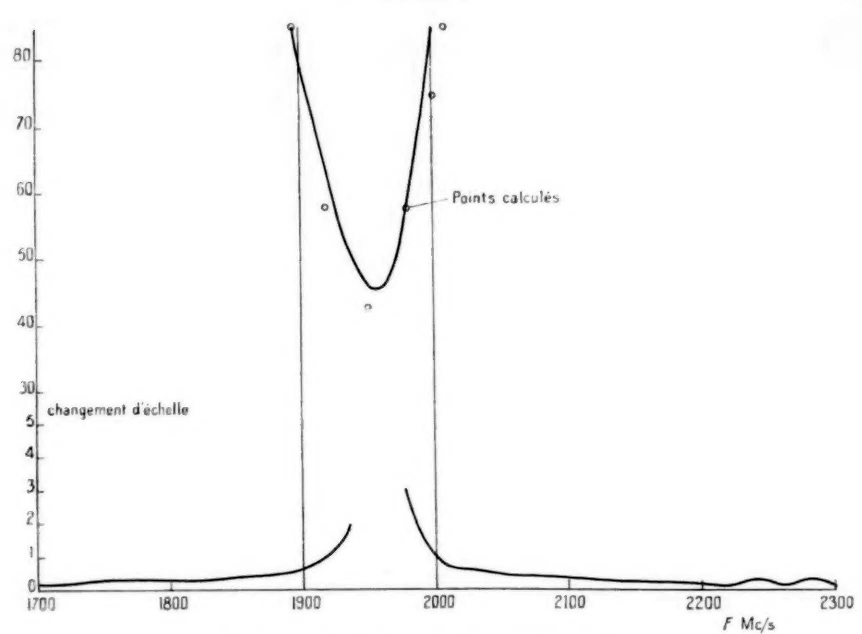


Fig. 22. — Duplexeur 2[e] type, atténuation.

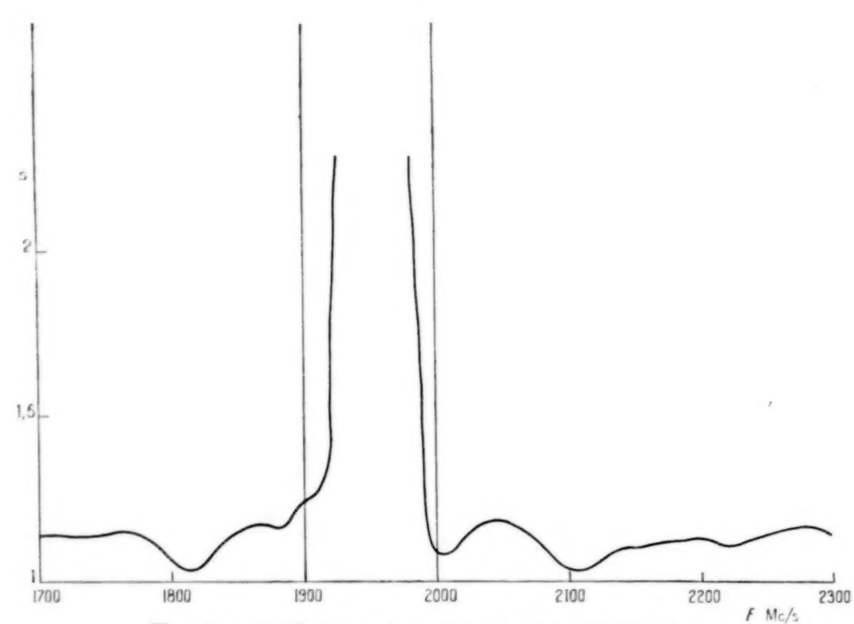


Fig. 23. — Duplexeur 2[e] type, taux d'ondes stationnaires.

sur des duplexeurs des deux types sont présentés sur les figures 20 à 23.

Il est à remarquer que la protection est supérieure à celle généralement fournie par aériens séparés (environ 70 dB) et que le taux d'ondes stationnaires ne dépasse pas 1,4, ce qui suffit pour un multiplex à impulsions.

Le choix des métaux constitutifs et la réduction

au strict minimum des supports isolants, ont permis de conserver les performances dans la gamme de température de — 40 à + 70° C.

Des essais comparatifs ont été effectués avec le matériel MX. 620 équipé soit d'un duplexeur associé à un aérien, soit de deux aériens.

Le rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ n'est pas affecté de plus de 1 dB avec l'aérien duplexé.

En conclusion, ce duplexeur, étudié en collaboration avec le S. T. T. A., permet d'utiliser, avec des performances égales, la moitié seulement des aériens qui étaient jusque là nécessaires aux liaisons hertziennes MX. 620.

Il y a là un allègement du matériel qui permet d'accroître sa mobilité et diminue sa vulnérabilité.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. Casse et L. Masliah, *Description et particularités techniques de l'équipement multiplex semi-fixe 12-24 voies à impulsions* MX.620 (*Annales de Radioélectricité*, t. 11, n° 46, octobre 1956, p. 339).

[2] E. A. Guillemin, *Communication Networks*, vol. 2, p. 356 à 366, John Willey et Sons.

[3] E. Breese, *Diplexing Filters* (*Convention Record of the I. R. E.*, Part 8, Communication and Microwaves, 1954).

[4] S. B. Cohn, *Principles of Transmission Line Filter Design* (*V. H. F. Techniques*, t. 2, Mc Graw Hill Book).

[5] W. B. Wholey et N. Eldred, *A new Type of Slotted Line Section* (*Proc. Inst. Radio Engrs*, mars 1950).

[6] J. H. Mole, *Filter Design Data for Communication Engineer E. et F. N. Spon*, 1952.

[7] G. L. Ragan, *Microwave Transmission Circuits* MIT.3 p. 164 à 170, Mc Graw Hill Book.

COMPLÉMENT A L'ÉTUDE DES ANTENNES A DOUBLE COURBURE (1)

PAR A. BOUDIGUES,

Direction Technique de la Société Française Radioélectrique.

SOMMAIRE. — *L'article décrit un procédé de calcul du réflecteur d'une antenne à double courbure à partir de la connaissance de la courbe centrale en C (ou en S). Après quelques exemples d'application, une brève discussion examine la validité pratique du calcul.* (C. D. U. : 621.396.677.7/.8.)

SUMMARY. — *The article describes a method of calculating the reflector of a double curvature aerial from a knowledge of the central curve at C (or at S). After a few examples of application, the validity of the calculation in practical cases is briefly discussed.* (U. D. C. : 621.396.677.7/.8.)

1. INTRODUCTION.

On sait qu'une antenne dite à double courbure est une antenne dont le diagramme dans le plan vertical est une courbe répondant à une fonction donnée (généralement cosécante carrée) et dont le diagramme dans le plan horizontal est un pinceau aussi étroit que possible. Cette antenne est généralement constituée par une source primaire éclairant un réflecteur dont la section par le plan vertical de symétrie est une courbe dite en C (ou en S).

Les auteurs tels que A. S. Dunbar [1] et L. Thourel [2] qui traitent de la détermination des antennes à double courbure, divisent en général le problème en deux parties principales :

a. Détermination de la courbe réflectrice plane C permettant d'obtenir dans son plan le diagramme recherché;

b. A partir de la courbe en C, détermination d'une surface telle qu'elle concentre l'énergie dans un dièdre aussi étroit que possible, centré sur le plan de la courbe en C.

Dunbar [1] démontre qu'une surface engendrée par une famille déterminée de paraboles s'appuyant sur la courbe en C répond à la question *b*.

Mais, d'une part, la démonstration qu'il en donne peut paraître manquer de rigueur, et d'autre part, il n'en ressort nullement que la surface proposée soit la seule à résoudre le problème.

Le présent article a pour but de compléter son étude dans ce sens. Posant le problème dans sa forme mathématique la plus générale, nous déterminerons d'abord l'équation de la surface. Nous verrons que la solution trouvée est unique et nous démontrerons son identité avec la surface de Dunbar.

Enfin, dans une brève conclusion, nous discuterons la validité de la solution trouvée.

2. DÉTERMINATION DE LA SURFACE S.

2.1. Mise en équation.

Soit (*fig.* 1) dans le plan xOy une courbe réfléchissante C déterminée pour obtenir le diagramme de rayonnement voulu dans le plan xOy lorsqu'elle est éclairée à partir du point O.

Soit une surface S d'équation $f(xyz) = 0$ décrite par un point courant M de coordonnées x, y, z.

Soit OM, un rayon incident quelconque tombant sur la surface.

(1) Manuscrit reçu le 16 avril 1957.

Appelons MN la normale en M à *S*, MR le rayon réfléchi.

On cherche à déterminer *S* pour que tous les rayons MR restent parallèles au plan xOy. Utilisons la notation vectorielle : $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ étant les vecteurs unitaires des trois axes de coordonnées, on a

$$(1) \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{m} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

$$(2) \qquad \overrightarrow{MN} = \vec{n} = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Exprimons ensuite que MR est parallèle au plan xOy,

$$(3) \qquad \overrightarrow{MR} = \vec{r} = \vec{i}a + \vec{j}b,$$

avec

$$(3') \qquad a^2 + b^2 = 1$$

en prenant pour r un vecteur unitaire.

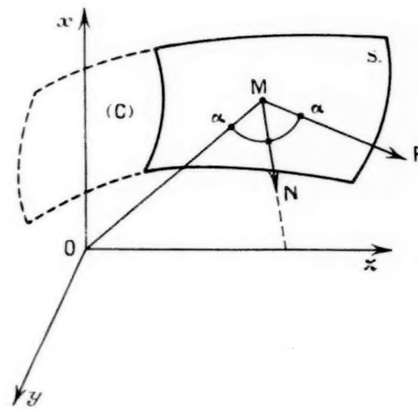


Fig. 1.

Enfin, écrivons les lois de Descartes avec la relation vectorielle suivante :

$$(4) \qquad \frac{\vec{m}}{|m|} \times \vec{n} = \vec{r} \times \vec{n};$$

(4) exprime, en effet :

a. que les angles $\widehat{OMN}$ et $\widehat{NMR}$ sont égaux;

b. que les droites OM, NM et MR sont coplanaires.

(4) s'écrit, en coordonnées cartésiennes,

$$(5) \qquad y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y} = \quad b\frac{\partial f}{\partial z}\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$(5') \qquad z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z} = -a\frac{\partial f}{\partial z}\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$(5'') \qquad x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \left(-b\frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

avec, toujours,

$$(3') \qquad a^2 + b^2 = 1.$$

Portons les valeurs de a et b tirées de (5) et (5′) dans la relation (3′). Il vient

$$(6) \qquad \left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2(x^2+y^2+z^2),$$

soit

$$(7) \qquad \boxed{z\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] - 2\frac{\partial f}{\partial z}\left[y\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial x}\right] = 0.}$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles qui définit la surface cherchée.

2.2. **Résolution de l'équation** (*voir* Annexe I).

L'équation (7) admet pour solution

$$(8) \qquad \boxed{z^2\frac{a^2+1}{K} \pm 2(x+ay) - K = 0.}$$

Ceci est une intégrale complète dépendant des constantes arbitraires a et K. Elle représente une surface Σ. En reliant a et K par une relation, la famille des surfaces Σ admet une enveloppe S qui est l'*intégrale générale cherchée*. Cette intégrale est unique.

3. ÉTUDE DE LA SURFACE *S*.

3.1. **Étude des surfaces** Σ.

Les sections de Σ par des plans z = const. sont deux droites D_1 et D_2. Le signe $\pm$ indique que ces droites sont symétriques par rapport à l'origine; nous ne conserverons que le signe + et les droites D_1. Pour les différentes valeurs de la constante, les droites sont parallèles.

Les sections par x = const. ou y = const. sont des paraboles. Les surfaces Σ sont donc des cylindres paraboliques.

3.2. **Relation entre** K **et** a.

La relation liant a et K, soit $\Phi(a, K) = 0$, sera déterminée en écrivant que les droites D dans le plan xOy enveloppent la courbe C définie en 2.1.

Pour cela, prenons un point P de la courbe C de coordonnées x_0 et y_0.

L'équation de C s'écrit

$$(9) \qquad y_0 = f(x_0).$$

La tangente en C au point P s'écrit

$$(y - y_0) = y'_0(x - x_0),$$

où y'_0 est la dérivée de y_0 par rapport à x_0.

Nous devons identifier cette tangente à la trace de Σ sur xOy, soit à

$$2(x + ay) - K = 0$$

obtenu en faisant $z = 0$ dans (8).

On en déduit

$$(10) \qquad ay'_0 = -1$$

et

$$(11) \qquad K = 2(x_0 + ay_0).$$

En éliminant x_0 et y_0 entre les trois équations (9), (10) et (11), on obtient la relation

$$\Phi(a, K) = 0$$

cherchée.

Par exemple, de la deuxième, on tire

$$x_0 = g(a)$$

et l'on porte dans la troisième

$$K = 2\{g(a) + af[g(a)]\}.$$

3.3. Équation de la surface S.

Elle s'obtient en éliminant a et K entre les trois relations

$$z^2\frac{a^2+1}{K} \pm 2(x + ay) - K = 0,$$

$$\Phi(a, K) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[z^2\frac{(a^2+1)}{K} \pm 2(x + ay) - K\right] = 0.$$

3.4. Quelques exemples.

3.4.1. La courbe C est une parabole de foyer O; on a

$$y_0^2 = 2P\left(x_0 + \frac{P}{2}\right),$$

P = paramètre de la parabole

$$2y_0y'_0 = 2P,$$

avec (10), on en déduit

$$y_0 = -Pa,$$

$$x_0 = \frac{P(a^2-1)}{2},$$

d'où

$$K = -P(a^2+1),$$

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}a} = -2Pa.$$

En effectuant l'élimination du paragraphe 3.3, on trouve aisément l'équation finale

$$y^2 + z^2 - 2P\left(x - \frac{P}{2}\right) = 0.$$

C'est évidemment l'équation d'un paraboloïde de révolution.

3.4.2. La courbe C est un cercle centré en O; on a

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2,$$

on en tire

$$x_0 = \frac{\pm R}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$y_0 = \frac{\pm aR}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$K = \pm 2R\sqrt{1+a^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}a} = \pm\frac{2aR}{\sqrt{1+a^2}}.$$

L'équation des surfaces Σ s'écrit

$$\pm(z^2 - 4R^2)\sqrt{a^2+1} + 4R(x + ay) = 0$$

et la dérivée par rapport à a

$$\pm(z^2 - 4R^2)\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + 4Ry = 0.$$

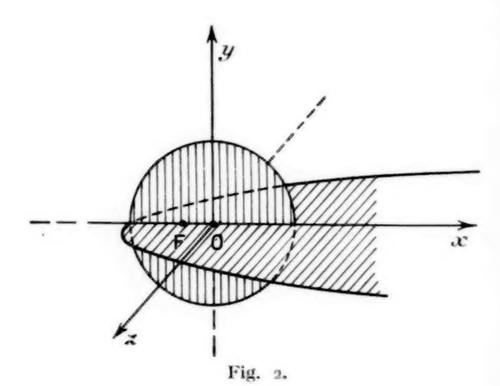


Fig. 2.

On en déduit le résultat de l'élimination

$$(z^2 - 4R^2)^2 - 16R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

On trouve une surface de révolution engendrée par une parabole du plan xOz, d'axe Ox, de foyer

le point

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x = \frac{R}{2}$$

et tournant autour de Oz (*fig.* 2).

4. IDENTITÉ DE LA SURFACE S ET DE LA SURFACE DE DUNBAR.

On trouvera en Annexe II une démonstration analytique de cette identité. Nous donnerons ici une démonstration géométrique :

D'après (7) et (8), la surface S est définie comme

autre point de cette droite pour déterminer la parabole.

A cette fin, appliquons le théorème de Meunier aux sections des cylindres T et T' par des plans pivotant autour de la normale en P à xOy.

Pour cela, projetons O (foyer commun de T et T') en Γ et Γ' sur PV et PV' respectivement normales à MT et M'T'. Γ et Γ' sont les foyers des sections droites (homothétiques des centres de courbures principaux par rapport à P).

En P, les cercles de Meunier, relatifs aux cylindres T et T' admettent respectivement $\frac{P\Gamma}{2}$ et $\frac{P\Gamma'}{2}$ comme

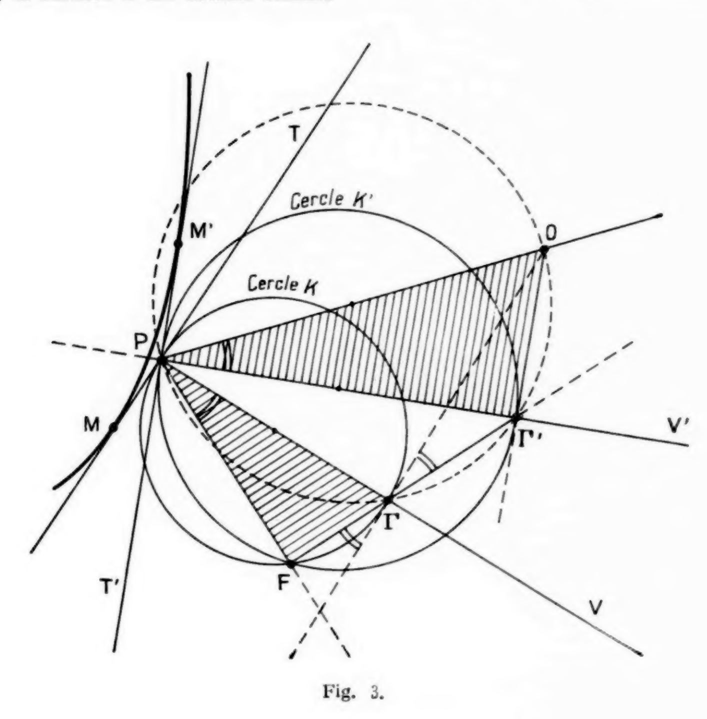


Fig. 3.

l'enveloppe des cylindres paraboliques de foyer O et dont l'arête dorsale enveloppe C.

Ceci posé, soit (*fig.* 3) dans le plan xOy, MT et M'T' deux tangentes voisines à la courbe C. Elles représentent la trace sur xOy de deux cylindres paraboliques T et T'. Ces cylindres se coupent suivant une parabole que nous cherchons à déterminer.

Les notions élémentaires de Géométrie descriptive permettent d'écrire que cette parabole d'intersection se projette sur xOy suivant une droite passant par P. Il nous suffit donc de trouver un

diamètre. Faisons sur les cercles de Meunier une homothétie de rapport 2 ayant pour centre P. On détermine ainsi deux cercles K et K' qui sont les lieux des foyers des sections respectivement de T et T' par des plans pivotant autour de la normale en P à xOy. Ces cercles ont un point F commun autre que P et qui est nécessairement le foyer de la parabole commune à T et T'. PF est donc la droite sur laquelle se projette cette parabole.

Établissons une propriété de cette droite.

Remarquant que les quatre points P, Γ, Γ' et O sont par construction sur un cercle de diamètre OP, par les théorèmes sur les angles inscrits, on voit

immédiatement que

$$\widehat{FPV} = \widehat{V'PO}. \quad (12)$$

Faisons tendre maintenant M′ vers M (*fig.* 4) :

P tend vers M;

PV′ tend vers MN normale en M à C;

$\widehat{VPO}$ tend vers $\widehat{NMO}$.

L'égalité (12) reste vérifiée et devient

$$\widehat{NMO} = \widehat{FMN}.$$

En définitive, la courbe engendrant la surface S

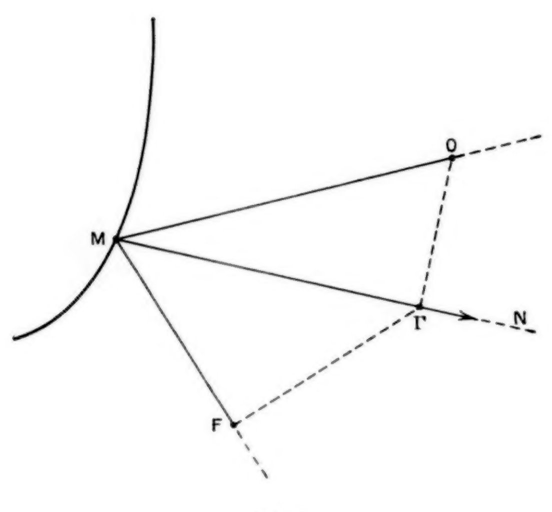


Fig. 4.

étant commune au cylindre T et au cylindre infiniment voisin T′ possède les propriétés suivantes :

1° Elle est située dans le plan du rayon réfléchi (OM étant rayon incident et C le miroir);

2° Elle admet pour foyer le point F obtenu en projetant d'abord O en Γ sur la normale PV, puis Γ en F sur le rayon réfléchi.

Ceci permet de l'identifier avec la parabole déterminée par Dunbar [1].

5. CONCLUSION.

Nous avons établi mathématiquement l'équation (7) déterminant la surface *S*. Les différents théorèmes d'existence démontrent qu'elle n'admet qu'une solution unique. Nous avons géométriquement déterminé cette solution.

Cependant, il nous reste à examiner de façon critique comment l'équation a été obtenue. Il apparaît, aussi bien dans la démonstration adoptée par Dunbar que dans celle ci-dessus exposée, que les lois de Descartes ont constitué un point de départ dont l'expression mathématique (14) revêt un caractère de séduisante simplicité. Mais l'utilisation des lois de Descartes implique l'abandon des propriétés ondulatoires des « rayons hertziens » et des phénomènes de diffraction qui s'y rattachent. Une telle approximation est valable lorsque les ouvertures sont grandes devant les longueurs d'ondes utilisées. Dans les cas contraires, ou lorsque la précision des phénomènes à étudier le requiert, le calcul du rayonnement doit s'effectuer en décomposant la surface du réflecteur en sources élémentaires dont on somme les effets.

Un tel point de départ nous aurait conduit à écrire que l'énergie réfléchie par *S* devait se concentrer dans un faisceau étroit centré sur xOy et de largeur minimum. Nous aurions obtenu au lieu de l'équation (7) une équation intégrodifférentielle beaucoup plus compliquée. Telle est la rançon d'une extrême et peu pratique rigueur. Aussi avons-nous préféré les hypothèses approchées qui, en fait, assimilent un faisceau étroit (entité physique) à une couche infiniment mince (entité mathématique).

On peut voir dans les remarques précédentes l'explication d'un résultat pratique que notre étude ne laisse pas prévoir.

En effet, des surfaces engendrées par des paraboles parallèles ont également fourni des antennes de qualité comparable à celles constituées par la surface *S*. Aucune étude mathématique n'a encore été donnée de ces nouvelles surfaces et il semble à première vue qu'elles ne constituent qu'une solution suffisamment approchée du problème. C'est peut-être exact. Cependant, il doit être souligné, comme nous l'avons fait plus haut, que nos hypothèses de base constituent elles-mêmes, dans leur absolu mathématique, une approximation non négligeable.

ANNEXE I.

Résolution de l'équation (7)

$$z\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] - 2\frac{\partial f}{\partial z}\left[x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Cette équation s'intègre de la façon suivante [3].

On pose

$$\text{(A.1)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -p\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial z},$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0.$$

On en déduit

$$\text{(A.2)} \qquad dz = p\,dx + q\,dy$$

et, d'autre part,

$$\text{(A.3)} \qquad z(p^2+q^2-1) + 2(px+qy) = 0.$$

On forme le système canonique

$$\frac{dx}{2[pz+x]} = \frac{dy}{2[qz+y]} = \frac{dz}{2[(p^2+q^2)z+px+qy]} = \frac{-dp}{p(p^2+q^2+1)} = \frac{-dq}{q(p^2+q^2+1)}$$

dont une intégrale première est

$$\text{(A.4)} \qquad \frac{q}{p} = a,$$

où a est une constante arbitraire.

Posant

$$\text{(A.5)} \qquad x + ay = u$$

et en portant (A.4) dans (A.1) et (A.2), on constate que

$$dz = p(u,\,z)\,du,$$

où $p(u, z)$ est racine de l'équation

$$z[p^2(a^2+1)-1] + 2p(x+y) = 0,$$

d'où

$$\frac{dz}{du} = \frac{-u \pm \sqrt{u^2+(a^2+1)z^2}}{(a^2+1)z}.$$

Ceci est une équation différentielle homogène du premier ordre, qu'on intègre par des moyens ordinaires, et l'on trouve

$$\frac{K^2}{u^2} \pm \frac{2K}{u} = (a^2+1)\frac{z^2}{u^2},$$

où K est une deuxième constante arbitraire.

En remplaçant u par son expression (A.5), on obtient l'intégrale complète de l'équation aux dérivées partielle (7)

$$z^2\frac{(a^2+1)}{K} \pm 2(x+ay) - K = 0.$$

ANNEXE II.

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE. DE L'IDENTITÉ DE SURFACE S ET DE CELLE DÉFINIE PAR DUNBAR [1].

On sait que la courbe de contact entre Σ et son enveloppe S est l'intersection de Σ avec la surface Σ' dont l'équation s'obtient en dérivant l'équation de Σ par rapport au paramètre.

L'équation de Σ' s'écrit

$$\text{(B.1)} \qquad z^2\left[\frac{2aK-(a^2+1)\dfrac{dK}{da}}{K^2}\right] + 2y - \frac{dK}{da} = 0.$$

En éliminant z entre (8) et (16), on peut voir que la courbe de contact est située dans le plan

$$\text{(B.2)} \qquad \left[\frac{2aK-(a^2+1)\dfrac{dK}{da}}{K}\right]\left[\frac{K-2(ay+x)}{a^2+1}\right] + 2y - \frac{dK}{da} = 0.$$

C'est une parabole, intersection du cylindre parabolique Σ par le plan (B.2).

Ce plan (B.2) est normal à xOy, il a pour trace sur ce dernier, la droite définie par l'équation (B.2).

La pente de cette droite est

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{a - \dfrac{K(a+1)}{2aK-(a^2+1)\dfrac{dK}{da}}}.$$

De (11) en 3.2 on déduit

$$(11') \qquad \frac{dK}{da} = 2y_0,$$

d'où

$$(\text{B}.3) \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{y_0(a^2-1)+2ax_0}{x_0(a^2-1)-1ay_0}.$$

Les composantes du vecteur unité $\frac{\overrightarrow{\text{MP}}}{|\text{MP}|}$ sont

$$\cos\beta = \frac{x_0(a^2-1)-2ay_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}(a^2+1)},$$

$$\sin\beta = \frac{-y_0(a^2-1)+2ax_0}{\sqrt{x_0^2+y_0}(a^2+1)}.$$

Celles du vecteur unité $\frac{\overrightarrow{\text{OM}}}{|\text{OM}|}$ sont

$$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \qquad \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

La normale à C en M est définie par le vecteur $\overrightarrow{\text{MN}}$ de composantes

$$1 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{y_0} = a.$$

Avec ces valeurs on vérifie que

$$\frac{\overrightarrow{\text{OM}}}{|\text{OM}|}.\overrightarrow{\text{MN}} = -\frac{\overrightarrow{\text{MP}}}{|\text{MP}|}.\overrightarrow{\text{MN}}.$$

Ceci exprime que $\overrightarrow{\text{MP}}$ est le rayon réfléchi de OM sur C, c'est-à-dire que la parabole génératrice de *S* est dans le plan de ce rayon réfléchi.

Coupons le cylindre (8) par le plan du rayon réfléchi et faisons une rotation d'axe autour de OZ pour que ce plan devienne parallèle au plan OXZ. Nous aurons l'équation de la parabole.

Les calculs se détaillent ainsi :

Rotation d'axe

$$x = X\cos\beta - Y\sin\beta,$$
$$y = X\sin\beta + Y\cos\beta.$$

En portant dans (8), équation de Σ, on trouve

$$z^2\frac{(a^2+1)}{k} + 2X(\cos\beta + a\sin\beta) - k = 0.$$

Ceci représente bien une parabole de focale

$$f = \frac{k}{2}\,\frac{\cos\beta + a\sin\beta}{(a^2+1)}.$$

De (11) en 3.2, on tire

$$\frac{k}{2} = x_0 + ay_0.$$

Des valeurs des composantes de $\overrightarrow{\text{MP}}$, $\overrightarrow{\text{MN}}$, $\overrightarrow{\text{OM}}$, on tire :

$$1^\circ \qquad x_0 + ay_0 = \overrightarrow{\text{MN}}.\overrightarrow{\text{OM}} = \rho\,|\text{MN}|\cos\sigma$$

en posant :

$\rho = |\text{OM}|$,

$\sigma =$ angle de MN, avec OM,

ou de MN avec MP

$$2^\circ \qquad \cos\beta + a\sin\beta = |\text{MN}|\cos\sigma.$$

$$3^\circ \qquad |\text{MN}| = \sqrt{a^2+1}.$$

En définitive,

$$f = \rho\cos^2\sigma$$

qui est bien la valeur trouvée par Dunbar et par le raisonnement géométrique du paragraphe 4.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. S. Dunbar, *Calculation of Doubly Curved Reflectors for Shaped Beams* (*Proc. Inst. Radio Eng.*, oct. 1948, p. 1289-1296).

[2] L. Thourel, *Calcul et construction des réflecteurs à double courbure* (*Onde électrique*, déc. 1955, p. 1153-1163).

[3] Bull, *Nouveaux éléments d'analyse*, t. I, chap. VII.

LES FERRITES [1]

Par A. VASSILIEV,

Département « Recherches Physico-Chimiques »
du Centre de Recherches Techniques de la Compagnie Générale de T. S. F.

DEUXIÈME PARTIE

Sommaire. — *La première partie de cet article avait été surtout consacrée au rappel des éléments de base du ferromagnétisme et à une étude sommaire de la théorie du ferrimagnétisme. Dans cette deuxième partie, l'auteur adopte un point de vue plus utilitaire et étudie les propriétés techniques des ferrites, les propriétés particulières de principaux groupes de compositions, puis décrit quelques cas d'emplois typiques.* (C. D. U. : 621.318.12.)

Summary. — *The first part of this paper had mainly been concerned with recalling the basic elements of ferromagnetism and with a brief examination of the theory of the ferrimagnetism. In this second part, the author takes a more utilitarian point of view and examines the technical properties of ferrites, the special properties of the main composition groups and describes a few typical examples of applications.* (U. D. C. : 621.318.12.)

7.4. La perméabilité magnétique des ferrites et les pertes.

7.4.1. La perméabilité magnétique. — La définition générale de la perméabilité magnétique μ est :

$$\mu = \frac{B}{H}. \tag{81}$$

La simplicité de cette relation n'est qu'apparente. En effet :

a. L'induction B et le champ H sont des grandeurs vectorielles. Par conséquent, la perméabilité μ n'est un scalaire que si B et H sont parallèles.

b. B est en général une fonction *non linéaire de H*, donc on peut écrire

$$B = \sum b_n (H)^n, \tag{82}$$

et

$$\mu = \sum b_n (H)^{n-1}. \tag{83}$$

c. Lorsque H est sinusoïdal,

$$H = H_0 \cos \omega t. \tag{84}$$

Les pertes introduisent un déphasage entre B et H, ce qui conduit à une relation du type

$$\mu = \sum b_n^* (H_0 \cos \omega t)^{n-1}, \tag{85}$$

avec

$$b_n^* = b'_n - j b''_n.$$

Par conséquent, si les pertes ne sont pas négligeables, la perméabilité μ doit être considérée comme une grandeur complexe

$$\mu = \mu' - j \mu''. \tag{86}$$

Pour les besoins pratiques, on peut se ramener à des cas extrêmes où la question devient plus simple. Cela conduit à définir diverses « perméabilités »

---

[1] Manuscrit reçu le 31 juillet 1957.

[2] A. Vassiliev, *Ann. Radioélectr.*, 1957, t. XII, n° 47, p. 15-32.

(*cf.*, par exemple, Bozorth [5]). A l'heure actuelle, les termes et les notations employés pour désigner ces « perméabilités » n'ont pas encore été normalisés et l'aboutissement d'un accord international sur la terminologie à employer serait souhaitable. Nous utiliserons ci-après des termes qu'on rencontre dans la littérature.

On s'occupera d'abord des propriétés « toriques » mesurées sur un *tore mince de section constante*. On supposera que, pour effectuer ces mesures, les spires du bobinage disposé sur le tore sont régulièrement réparties et que le flux de fuite est nul. Dans ces conditions, si l'on désigne par n_1 le nombre de spires et par i l'intensité du courant dans le bobinage, le champ dans le tore sera

$$H_{oe} = \frac{4\pi n_1 i(\mathrm{A})}{10\, l_m(\mathrm{cm})}. \tag{87}$$

où l_m est la circonférence moyenne du tore.

Les mesures de μ et des pertes seront examinées dans chaque cas particulier.

7.4.2. La perméabilité initiale et les pertes. — La perméabilité initiale μ_0 est définie pour un tore n'ayant subi l'action d'aucun champ magnétisant, par la relation

$$\mu_0 = \lim \frac{B}{H} (H \to 0). \tag{88}$$

Lorsque le champ H est très petit, les formules (82) et (83) se réduisent aux deux premiers termes

$$B = b_1 H + b_2 H^2, \tag{89}$$

et

$$\mu = \frac{B}{H} = b_1 + b_2 H. \tag{90}$$

Le terme b_1 est souvent désigné dans les publications par μ_0 et b_2 par ν, d'où

$$\mu = \mu_0 + \nu H. \tag{91}$$

En fait, lorsque H varie de $-H_m$ à $+H_m$, le point figuratif de B parcourt dans le plan (B, H) un cycle d'hystérésis que Rayleigh assimile à deux arcs de paraboles représentés par (*fig.* 20) :

$$B = (\mu_0 + \nu H_m) H \pm \frac{\nu}{2} (H_m^2 - H^2). \tag{92}$$

Les pertes d'énergie par cycle parcouru et par unité de volume sont

$$W_h = \frac{1}{4\pi} \int B \, \mathrm{d}H = \frac{\nu}{3\pi} H_m^3. \tag{93}$$

Si l'on développe B en série de Fourrier,

$$B = (\mu_0 + \nu H_m) H_m \cos \omega t \pm \frac{4}{\pi} \nu H_m^2 \left[\left(\frac{\sin \omega t}{3} - \frac{\sin 3 \omega t}{15} \right) \right]. \tag{94}$$

On vérifie que le terme fondamental en phase avec H donné

$$\mu = \mu_0 + \nu H_m. \tag{95}$$

On voit apparaître les harmoniques impairs de ω.

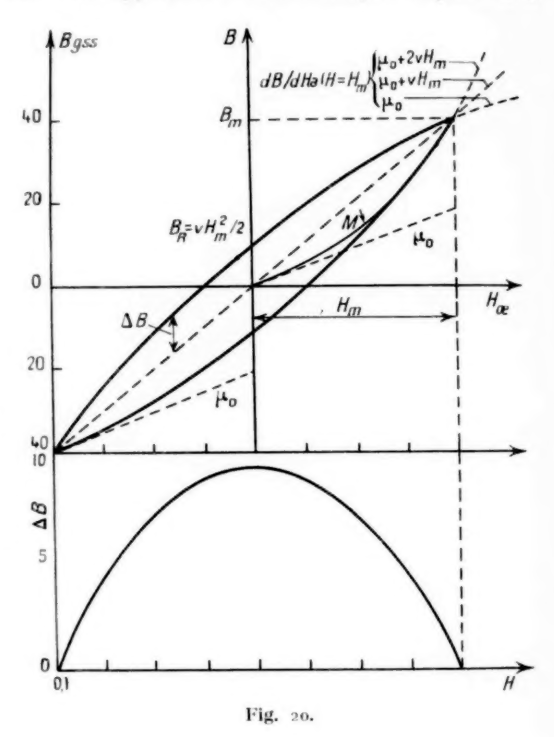


Fig. 20.

En général, la mesure des pertes est effectuée en même temps que celle de la perméabilité initiale. On supposera que l'on ait régulièrement réparti sur un tore en ferrite n_1 spires. Si r_1 et r_2 désignent le rayon intérieur et le rayon extérieur du tore (*fig.* 21), e (cm) étant l'épaisseur du tore, le diamètre moyen du tore est défini par $d_m = (r_1 + r_2)$ (cm) et la section du tore $s\,(\mathrm{cm}^2) = e\,(r_2 - r_1)$.

On mesure l'impédance Z de ce bobinage

$$Z = R + j L \omega. \tag{96}$$

R représente la résistance équivalente des pertes totales. Si l'on tient compte de la résistance ohmique R_0 du fil, la résistance équivalente des pertes totales dans le ferrite sera $R_f = R - R_0$.

La self-inductance L permet de calculer μ_0

(97) $$L = \mu_0 \frac{4\pi n_1^2 s}{\pi d_m} 10^{-3} \mu\mathrm{H}.$$

Le « coefficient de surtension » ou le facteur de qualité du ferrite est

(98) $$Q = \frac{L\omega}{R_T}.$$

La tangente de l'angle de pertes magnétiques est

(99) $$\mathrm{tg}\,\delta_m = \frac{1}{Q} = \frac{R_T}{L\omega}.$$

Pour des mesures précises, il y a lieu de tenir compte de la capacité répartie du bobinage. Avec des tores de diamètre moyen, voisin de 3 cm et pour $n_1 \sim 100$, on trouve souvent des valeurs de la capacité répartie de 3 à 15 $\mu\mu$F.

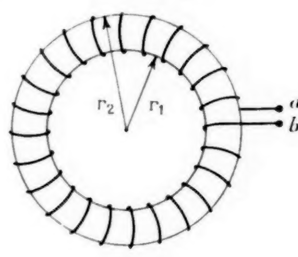


Fig. 21.

Les pertes totales peuvent être décomposées en trois termes :

— Les pertes dues à l'hystérésis;
— Les pertes dues aux courants de Foucault;
— Les pertes dues au « traînage ».

Les pertes par hystérésis à une fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ peuvent être calculées en partant de l'expression donnant la tension V aux bornes du bobinage (les autres pertes étant négligées)

(100) $$V = R_0 I_m \cos\omega t + n_1 s \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} . 10^{-8}\ \mathrm{Volt}.$$

En développant et en posant

(101) $$R_h^0 = \frac{4 L_0 \omega}{3\pi} \frac{\nu H_m}{\mu_0}$$

et

(102) $$R_{3\omega}^0 = \frac{4 L_0 \omega}{5\pi} \frac{\nu H_m}{\mu_0},$$

on trouve

(103) $$V = (R_0 + R_h^0) I_m \cos\omega t - L_0\omega\left(1 + \frac{\nu H_m}{\mu_0}\right) I_m \sin\omega t - R_{3\omega}^0 I_m \cos 3\omega t.$$

En négligeant le troisième terme, on définit

(104) $$\mathrm{tg}\,\delta_h = \frac{R_h^0}{L\omega} = \frac{4}{3\pi} \frac{\nu H_m}{\mu_0 + \nu H_m}$$

et, lorsque $\nu H < \mu_0$, on a

(105) $$\mathrm{tg}\,\delta_h = \frac{4}{3\pi} \frac{\nu H_m}{\mu_0}.$$

Le terme R_h peut se mettre sous la forme

(106) $$R_h = \frac{4}{3\pi\mu_0} L H_m \omega = A' L H_m f = A L I_m f.$$

Les pertes par courant de Foucault, peuvent être définies par la tangente de l'angle de pertes

(107) $$\mathrm{tg}\,\delta_F = k f$$

ou par la résistance de pertes équivalentes $R_F = BLf^2$.

Les pertes résiduelles attribuées au « traînage magnétique » sont définies séparément par l'expression

(108) $$\mathrm{tg}\,\delta_r = \mathrm{Lim}\,\frac{R - R_0}{f} = CL,$$

d'où les expressions

(109) $$R_T = A L I_m f + B L f^2 + C L f,$$

et

(110) $$\mathrm{tg}\,\delta_T = \frac{A I_m + B f + C}{2\pi}.$$

On définit parfois les coefficients suivants :

— Le coefficient de pertes par hystérésis à 800 Hz, $\mathcal{H}$ (ohm.amp.tours/Henry.cm);
— Le coefficient de pertes par courant de Foucault à 800 Hz, F_n (ohm/Henry);
— Le coefficient de pertes par traînage, T à 800 Hz, T (ohm/Henry).

La relation (109) peut être mise sous la forme

$$R = R_0 + \frac{\mathcal{H} L n_1 I_m}{800\, l_m} f + \frac{F_n}{(800)^2} L f^2 + \frac{T}{800} L f.$$

Pour déterminer les divers termes, on peut mesurer : R_0, L et R avec des courants I_m et $2I_m$ et aux fréquences f et $2f$, d'où ν, μ_0, $L(\mu_0)$, A, B et C (ou $\mathcal{H}$, F_n et T). Par exemple

(111) $$\nu = \frac{L(2I_m) - L(I_m)}{H_m} \frac{10\, l_m}{4\pi n_1^2 s} = \frac{10}{n_1 s I_m} \frac{L(2I_m) - L(I_m)}{\left(\frac{4\pi n_1}{l_m}\right)^2},$$

(112) $$A = \frac{R_T(2I_m) - R_T(I_m)}{L f},$$

(113) $$B = \frac{R_T(2f) - 2R_T(f)}{2 L f^2}$$

et enfin, la valeur de C.

On signalera que $\mathcal{K}$, F_n et T et, par conséquent, tg δ_T varient en fonction de la température [29].

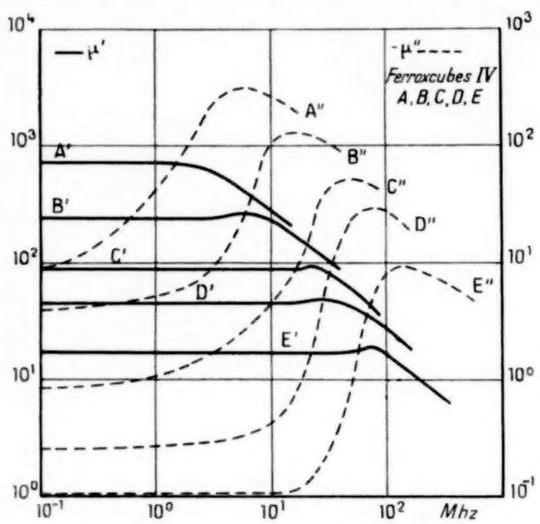


Fig. 22. — (D'après J. J. Went et E. W. Gorter [25]).

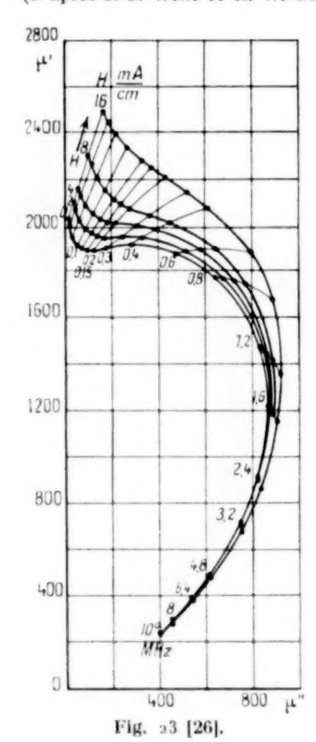


Fig. 23 [26].

Les mesures de la perméabilité initiale et celles des pertes demandent des précautions diverses suivant les cas d'espèce. Aux basses fréquences, le nombre de spires disposées sur le tore pouvant être assez grand, la capacité répartie est un facteur important. Aux fréquences élevées et pour des ferrites à basse perméabilité initiale, le nombre des spires est limité, les « fuites magnétiques » peuvent causer de grosses erreurs. On doit alors recourir à des dispositifs spéciaux de mesures [30].

7.4.2.1. *Variation de la perméabilité initiale* μ_0 *en fonction de la fréquence.* — La perméabilité initiale et les pertes des ferrites varient en fonction de la

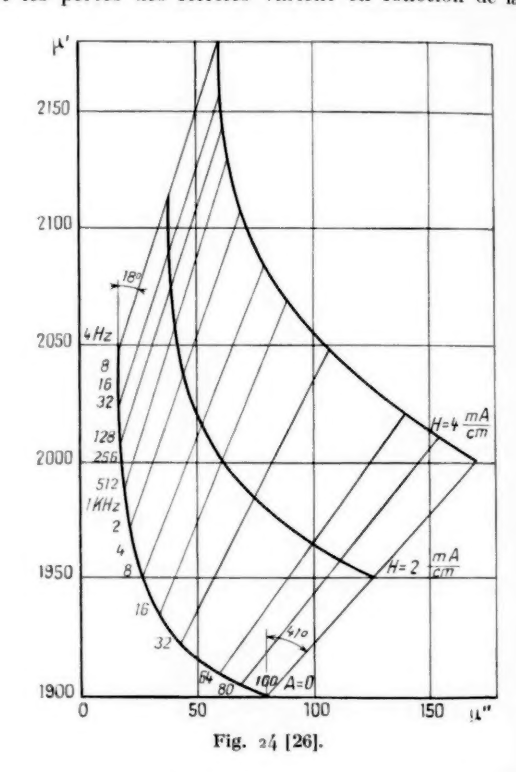


Fig. 24 [26].

fréquence. Snoek [24] a trouvé que, pour un ferrite, il existait une fréquence critique caractérisée par un maximum de pertes et par le début d'une décroissance de la perméabilité initiale. Cet auteur a trouvé et interprété une relation entre cette fréquence critique et la valeur de la perméabilité initiale (définie dans la gamme des fréquences où elle peut être considérée comme constante). Nous reproduisons ci-contre (*fig.* 22), les valeurs de μ' et de μ'' correspondant à plusieurs sortes de ferrites nickel-zinc, données par J. J. Went et E. W. Gorter [25].

D'après R. Feldtkeller et O. Kolb [26], μ' et μ'' varient également aux très basses fréquences (*fig.* 23 et 24) [26].

L'étude de μ' et de μ'', bien au-delà de la fréquence critique de Snoek a été effectuée par G. T. Rado [27] et a conduit à la découverte d'une résonance dans la gamme des ondes centimétriques (*fig.* 25).

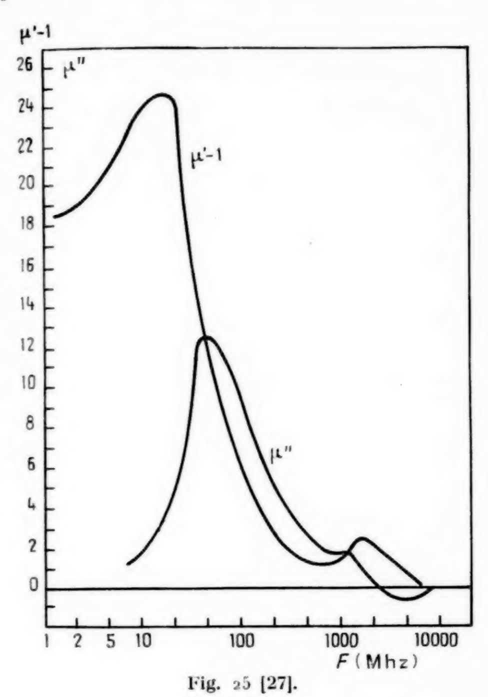


Fig. 25 [27].

7.4.2.2. *Variation de la perméabilité initiale en fonction de la température.* — Les courbes représentant les variations de la perméabilité initiale en fonction de la température affectent des formes diverses qui dépendent de la composition du matériau et également de la plupart des paramètres signalés au paragraphe 6 (Synthèse des ferrites). Dans un intervalle de température limité, on peut définir un « coefficient de température » de la perméabilité initiale :

$$\alpha_{\mu_0}(T_1, T_2) = \frac{\mu_0(T_2) - \mu_0(T_1)}{\mu_0(T_1)(T_2 - T_1)} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\Delta\mu_0}{\Delta T}. \tag{114}$$

Certains auteurs préfèrent une formule un peu différente, présentant certains avantages pratiques

$$\alpha'_{\mu_0}(T_2 T_1) = \frac{\alpha_{\mu_0}(T_2 T_1)}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0^2}\frac{\Delta\mu_0}{\Delta T}. \tag{115}$$

Ces formules sont souvent valables avec une approximation suffisante, pourvu que ΔT ne dépasse pas quelques dizaines de degrés. Par exemple,

$$T_1 = 20^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad T_2 = 55^\circ\text{C}.$$

Lorsqu'on doit considérer une gamme de températures plus étendue, par exemple (— 40° C, + 80° C), un examen plus attentif s'impose. En effet, dans de nombreux cas, la courbe $\mu_0 = f(T)$ n'est pas assimilable à une droite dans une gamme de température assez large, par exemple — 40 à + 80° C (*fig.* 26, courbes 1 et 2).

On voit (courbe 2) que dans un intervalle de température ΔT limité, le coefficient de température de μ_0 peut être pratiquement nul.

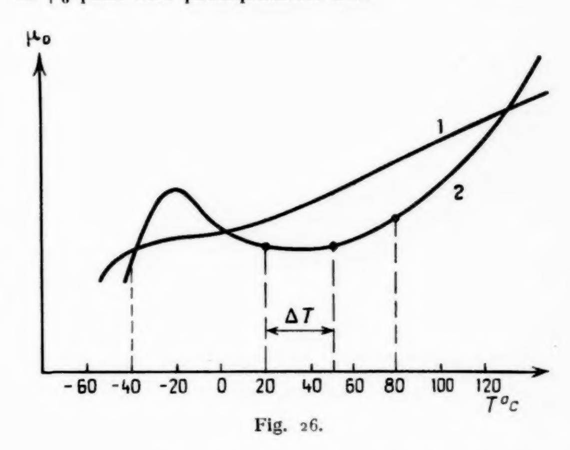


Fig. 26.

7.4.2.3. *La stabilité de la perméabilité initiale.* — La perméabilité initiale et les pertes d'un matériau peuvent subir des variations irréversibles en fonction de divers paramètres.

La perméabilité initiale dépend des traitements magnétiques suivis d'une désaimantation, et elle peut varier au cours du temps [28]. Des traitements thermiques à basse température (par exemple $T < 100°$ C) peuvent également l'affecter. La perméabilité initiale et les pertes peuvent être sensibles aux chocs mécaniques [28]. On attribue ces variations à la présence de parois en équilibre métastable [28].

Il est possible que les modifications de μ_0 et de tg δ_{μ_0} soient aussi dues à des variations des tensions mécaniques internes ou externes, à une modification de la structure d'un matériau trempé, etc. On a observé des instabilités de toute la courbe $\mu_0(T)$, principalement avec des ferrites « manganèse-zinc » frittés à l'air ou des ferrites insuffisamment frittés.

On mentionnera un phénomène de « traînage » particulier signalé par R. Feldtkeller et O. Kolb [26], consistant en un accroissement de μ' et de μ'' en fonction du temps sous l'action du champ alternatif de mesure d'amplitude constante. Un phénomène analogue a été observé par l'auteur lorsqu'on mesure μ_0 en fonction de la température, le courant

alternatif étant constamment appliqué à l'échantillon.

Du point de vue pratique, il semble que des variations de μ_0 en fonction du temps de l'ordre de 4 à 5 % soient possibles.

7.4.2.4. *Essais d'interprétations théoriques.* — Pour interpréter sa découverte, Snoek [24] a admis que la perméabilité initiale était due aux rotations des moments et que le maximum de μ'' apparaissant aux fréquences radioélectriques serait dû à une gyrorésonance des spins soumis à l'action du champ interne d'anisotropie H_a. Cet auteur a établi la relation suivante :

$$\mu_0 - 1 = \frac{4\pi}{3}\,\frac{J_s^2}{|K_1|}. \tag{116}$$

Cependant, ce point de vue est contesté par G. T. Rado [27]. En effet, la relation de Larmor

$$2\pi F_r = \gamma H_a, \tag{117}$$

où F_r est la fréquence de résonance, γ le rapport gyromagnétique, et la relation

$$H_a = 2\,\frac{|K_1|}{J_s} \tag{118}$$

permettent de calculer K_1 à partir de F_r.

Or, G. T. Rado trouve que seule la résonance en hyperfréquences correspond à une valeur de K_1 compatible avec celles obtenues par d'autres méthodes. D'après G. T. Rado, le maximum de μ'' découvert par Snoek pourrait être dû à un phénomène de relaxation des parois de Bloch plutôt qu'à une gyrorésonance. Cet auteur étaye son argumentation avec les résultats de mesures effectuées sur de la poudre de « Ferramic A » dont les particules avaient un diamètre inférieur au « diamètre critique » d_0. Ces mesures montreraient que la résonance de Snoek n'apparaît pas lorsque $d < d_0$, c'est-à-dire lorsque les parois de Bloch ne peuvent pas se former.

R. S. Weisz [31] a utilisé une relation semblable à (116) pour déterminer les valeurs de K_1 de quelques ferrites simples. Il pose la relation

$$\mu_0 - 1 = A\,\frac{J_s^2}{|K_1|} \tag{119}$$

et admet que A est indépendant de la nature du matériau.

R. S. Weisz trouve $A = 21$ pour la magnétite et il déduit ensuite les valeurs de K_1 d'autres ferrites (Mn, Ni, Co, Cu, Mg) à partir des valeurs correspondantes de μ_0 et de J_s. Les résultats ont été reproduits à la figure 27 *a*.

En fait, à la température ambiante, K_1 est négatif pour la majorité des ferrites, sauf pour le ferrite de cobalt. La figure 27 *b* représente les valeurs absolues du coefficient de magnétostriction de saturation λ_s données par R. S. Weisz. A la température ambiante, le coefficient λ_s est négatif dans la plupart des cas. On citera comme exception la magnétite pour laquelle $\lambda_s > 0$. On donnera quelques valeurs de λ_s dans le chapitre consacré aux divers groupes de compositions.

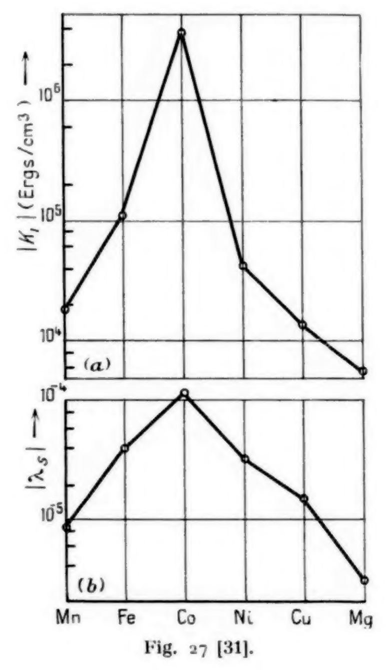


Fig. 27 [31].

7.4.2.5. *Variation de la perméabilité aux champs de faible amplitude en fonction de champs superposés.* — Les variations de la perméabilité aux champs de faible amplitude en fonction d'un champ d'amplitude assez grande H_0 superposé au champ de haute fréquence sont différentes suivant que H_0 est parallèle ou perpendiculaire à celui-ci.

Dans le cas où H_0 est parallèle au champ haute fréquence et que sa valeur croît de O à H_{0m}, on obtient la courbe analogue à la courbe 1 (*fig.* 28). Lorsque H_0 varie entre $\pm H_{0m}$, on obtient la courbe 2 (*fig.* 28). Lorsque H_{0m} croît en partant de zéro, le tore n'ayant, au préalable, subi l'influence d'aucun champ de forte amplitude, on obtient une famille de courbes, telle que celle de la figure 29.

Il serait intéressant de faire un rapprochement entre la forme de ces courbes et celle des cycles d'hystérésis tracés avec H variant entre $\pm H_{0m}$.

Ces courbes deviennent dissymétriques si le tore a été préalablement saturé et, par conséquent, si l'on part de l'état de rémanence.

Ces variations de la perméabilité peuvent être gênantes pour certains emplois pratiques, mais par ailleurs, elles peuvent être utiles pour d'autres cas,

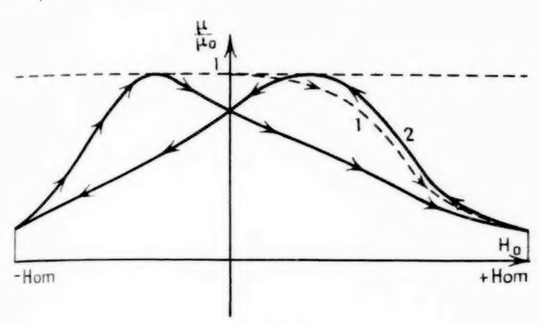


Fig. 28.

où l'on recherche une variation de la perméabilité en fonction d'un champ superposé.

Lorsque H_0 est perpendiculaire au champ de haute fréquence, $\frac{\Delta B}{\Delta H}$ haute fréquence, varie également. Ce cas est rarement employé dans la pratique et peu mentionné dans les publications. La variation

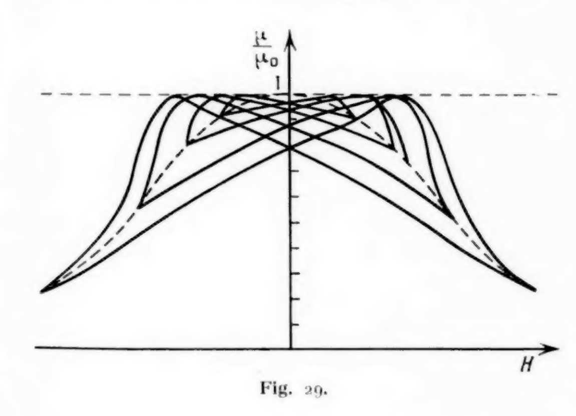


Fig. 29.

de la perméabilité aux champs de faible amplitude en fonction de la température dépend de la valeur de H_0.

7.4.2.6. *Résonance « spatiale »*. — On signalera qu'une résonance analogue à la résonance dans les cavités hyperfréquences, mais très amortie à cause des pertes diélectriques peut se produire dans une pièce en ferrite dont les dimensions sont comparables à la longueur d'onde λ_m dans le matériau

$$\lambda_m = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{120}$$

Ce phénomène peut être gênant pour certains emplois et il peut fausser les résultats de mesures.

7.4.3. La perméabilité et les pertes des ferrites aux champs de forte amplitude. — Ces propriétés sont étroitement liées aux cycles d'hystérésis des ferrites ou plutôt aux familles de ces cycles d'hystérésis relevés avec des champs H_m d'amplitude croissante.

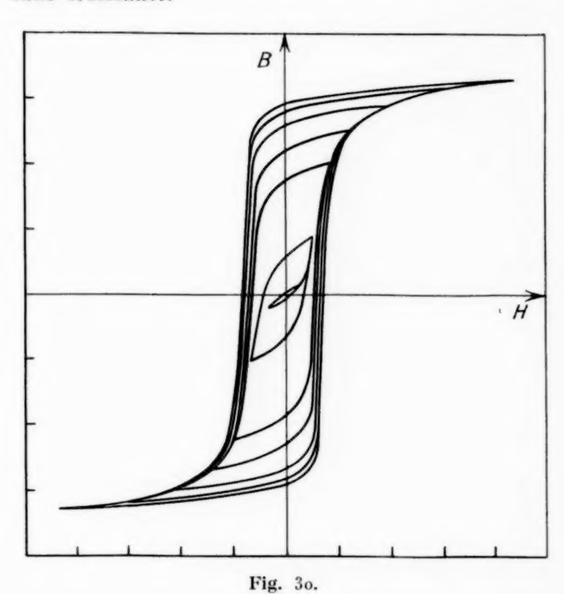


Fig. 30.

Dans ce paragraphe, on considérera le cas des cycles d'hystérésis de forme « classique » (*fig.* 30). Lorsqu'un champ continu se trouve superposé au champ alternatif, on obtient une famille de cycles d'hystérésis dissymétriques (*fig.* 31). On mentionnera enfin le cas d'un champ continu superposé, perpendiculaire au champ alternatif (*fig.* 32).

On définit la perméabilité aux champs de forte amplitude par la relation conventionnelle

$$\mu_A = \frac{B_m}{H_m}, \tag{121}$$

μ_A est souvent appelée « perméabilité d'amplitude ». La variation de la perméabilité d'amplitude en fonction de H_m et en l'absence de champ continu superposé peut être déduite de divers points de

la courbe de première aimantation, d'où les courbes

$$\mu_A = f(H_m) \quad \text{ou} \quad B_m = f(\mu_A) \quad (\textit{fig.}\ 33\ \text{et}\ 34).$$

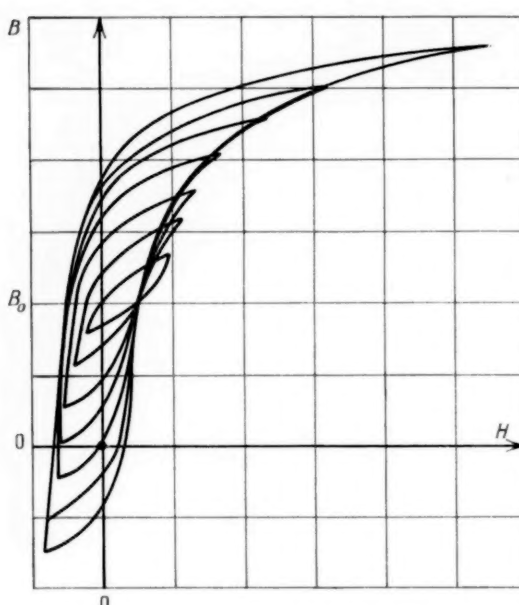


Fig. 31. — Cycles dissymétriques à induction superposée B_0 constante et B variant entre $\pm B_r$.

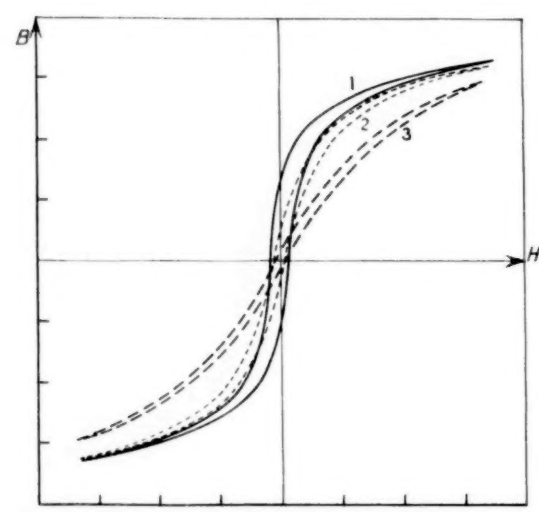


Fig. 32. — Cycles d'hystérésis symétriques avec un champ superposé orthogonal au champ alternatif. Le champ superposé croît dans l'ordre 1, 2, 3.

On définit la perméabilité maximum

$$\mu_{max} = \max(\mu_A). \tag{122}$$

On voit que l'étude de μ_A va de pair avec celle des cycles d'hystérésis. L'étude théorique des cycles d'hystérésis a été entreprise par plusieurs auteurs [5], [35].

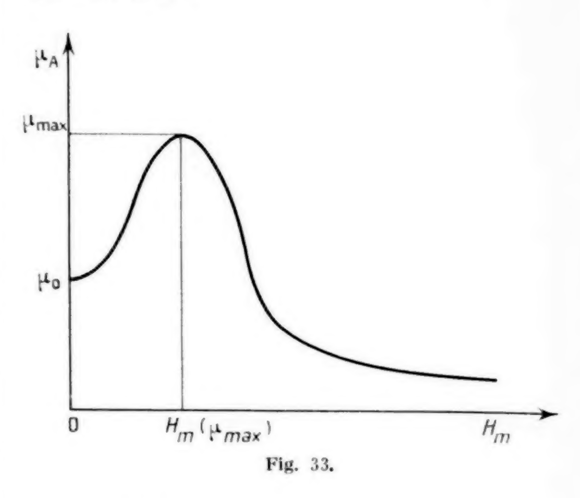


Fig. 33.

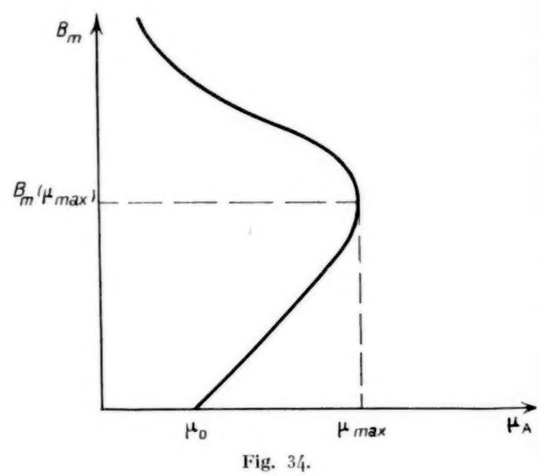


Fig. 34.

7.4.3.1. *Effet de la température et de l'amplitude du champ.* — Lorsque la température varie, les cycles d'hystérésis se déforment, ce qui entraîne une variation de $\mu_A = f(H)$. La figure 35 représente, d'après [32], la déformation du cycle d'hystérésis d'un ferrite nickel-zinc. Le cycle (1) est relevé à la température ambiante, les cycles (2), (3) et (4) sont relevés aux températures de liquéfaction de l'azote, de l'hydrogène et de l'hélium.

Les figures 36 et 37 représentent, à titre d'exemple, l'évolution de $\mu_A = f(H_m)$ et de $B = f(\mu_A)$ en fonction de la température. On remarquera qu'il existe,

dans le cas envisagé, un champ H_1 pour lequel l'induction B_1 est pratiquement constante en fonction de la température, entre 25 et 100° C.

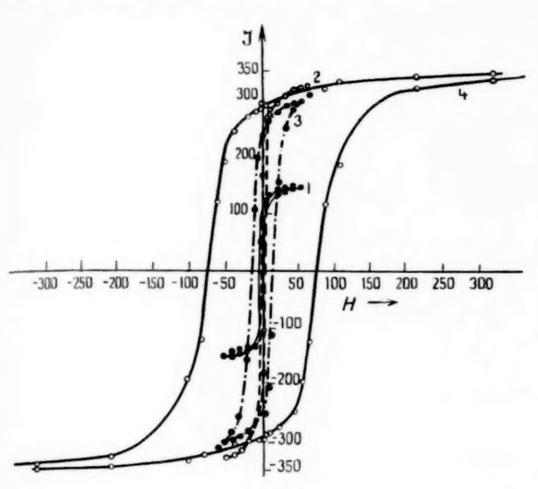


Fig. 35.

La figure 38 représente l'évolution de la courbe de première aimantation en fonction de la température. La figure 39 représente la variation de $B(H)$ en fonction de la température. On voit, qu'entre 25

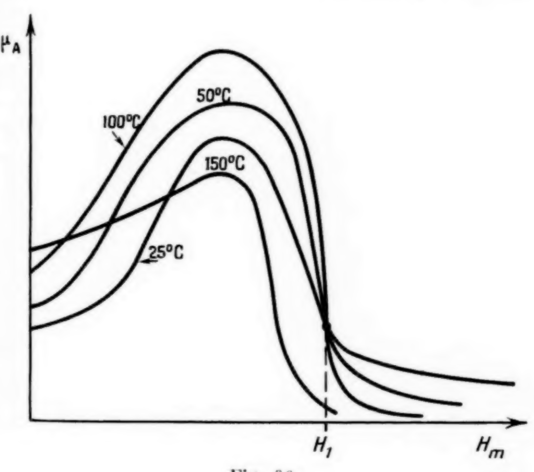


Fig. 36.

et 100° C, la courbe $B(H_1)$ reste très voisine de $B(H) = B_1$. Donc le coefficient de température de $\mu_A(H_1)$ est pratiquement nul.

7.4.3.2. *Effet de la fréquence et de l'amplitude du champ.* — La forme des cycles d'hystérésis et μ_A dépendent de la fréquence et de l'amplitude du champ. Il semble qu'aux fréquences élevées, les cycles d'hystérésis tendent à devenir elliptiques, le

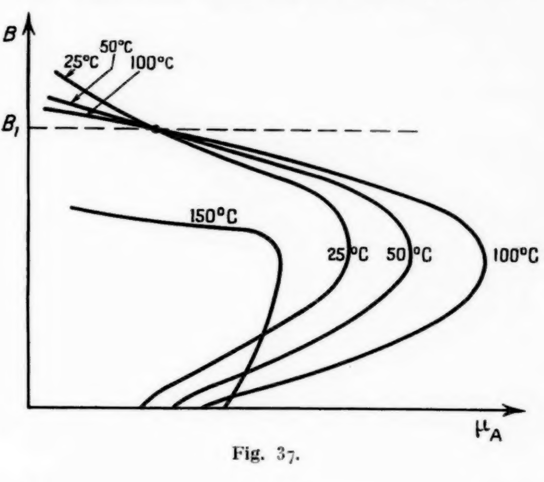


Fig. 37.

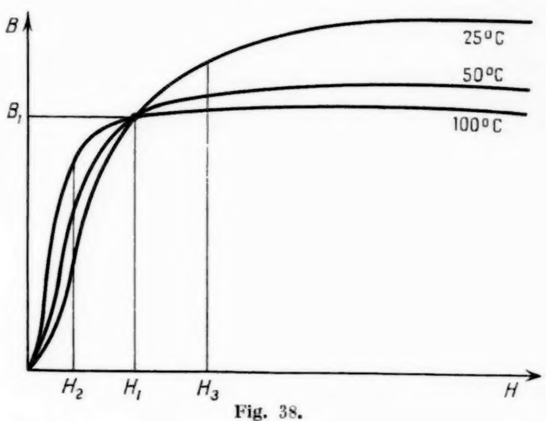


Fig. 38.

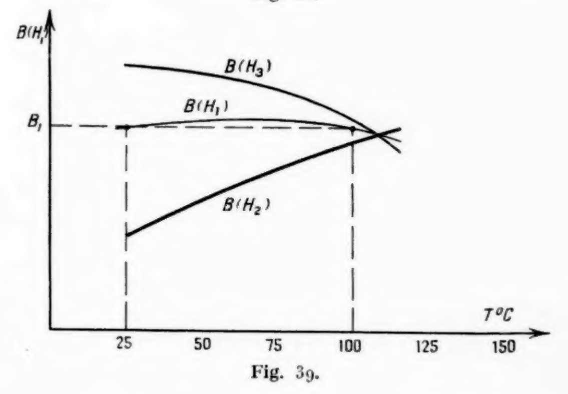


Fig. 39.

grand axe de l'ellipse s'inclinant vers la droite $B = \mu_0 H$. Les résultats de quelques mesures sont donnés par L. I. Rabkin [33].

7.4.3.3. ***Les pertes aux champs de forte amplitude.*** — Ces pertes dépendent de la fréquence de l'amplitude du champ, ainsi que de la température.

Étant donné que la conductibilité thermique des ferrites est plus faible que celle des métaux, les dimensions des pièces interviennent également.

La mesure de ces pertes est délicate. La méthode calorimétrique paraît être la plus indiquée pour des mesures précises.

7.4.4. La perméabilité apparente. — Dans la pratique, on emploie souvent des noyaux en ferrite constituant des circuits magnétiques « ouverts ». On doit alors tenir compte du champ démagnétisant créé par les charges magnétiques terminales.

Si l'on désigne par H_a le champ appliqué, et par H_d le champ démagnétisant, le champ H_r réellement agissant dans le matériau sera

$$H_r = H_a - H_d. \tag{123}$$

Puisque H_d est dû à $J(H_r)$, on a

$$H_d = NJ. \tag{124}$$

N est le facteur de désaimantation.

On peut alors écrire

$$H_r = H_a - NJ \tag{125}$$

ou

$$H_r = H_a - \frac{N}{4\pi}(B - H_r). \tag{126}$$

On définit la perméabilité apparente μ_a dans le cas où H et J sont parallèles,

$$\mu_a = \frac{B}{H_a}. \tag{127}$$

On démontre que

$$\frac{1}{\mu_t} = \frac{1}{\mu_a} - \frac{N}{4\pi}, \tag{128}$$

où μ_t désigne la perméabilité *torique*.

Un cas très important pour la pratique est celui des barreaux très allongés disposés dans un champ *uniforme*.

On peut calculer le facteur de désaimantation et, par conséquent, déduire μ_t à partir de μ_a ou inversement.

Si l'on désigne par m le rapport $\frac{\text{grand axe}}{\text{petit axe}}$ $\left(\text{ou } \frac{\text{longueur}}{\text{diamètre}} \text{ pour les barreaux cylindriques}\right)$, on a, pour l'ellipsoïde allongé dont le grand axe est parallèle au champ,

$$\frac{N}{4\pi} = \frac{1}{m^2-1}\left[\frac{m}{\sqrt{m^2-1}}\log_e(m+\sqrt{m^2-1}) - 1\right] \tag{129}$$

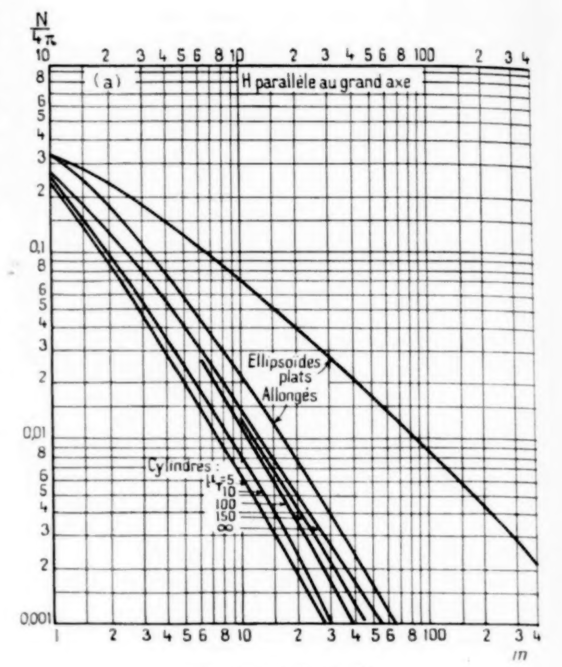


Fig. 40 [5] (Bozorth).

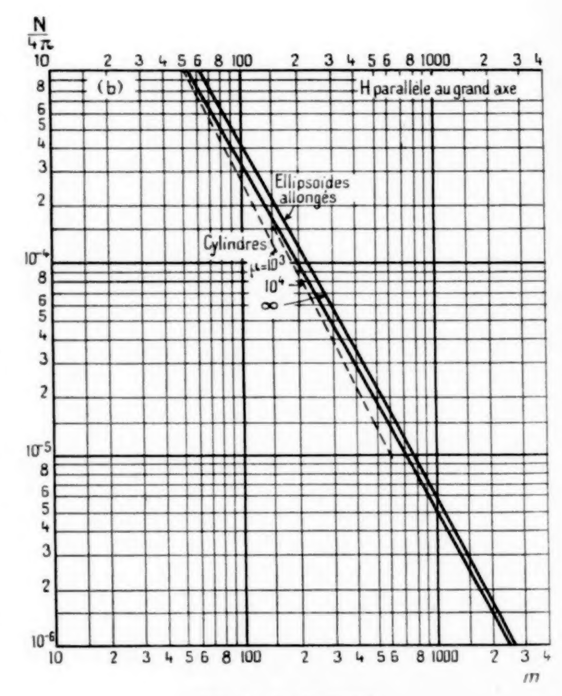


Fig. 41 [5] (Bozorth).

et, pour l'ellipsoïde aplati,

$$\frac{N}{4\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{m^2}{(m^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc sin}\,\frac{\sqrt{m^2-1}}{m} - \frac{1}{m^2-1}\right]. \tag{130}$$

Les figures 40 et 41 donnent, d'après [5], les

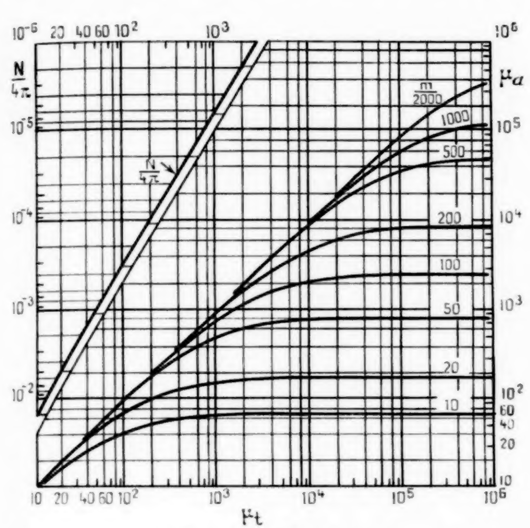


Fig. 42 [5] (Bozorth).

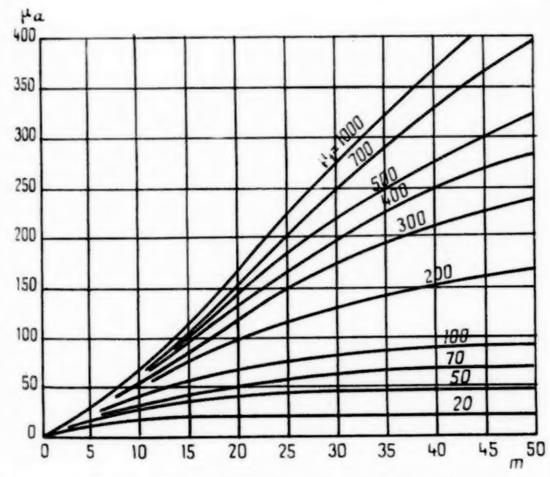


Fig. 43 [34] (H. Block et J. J. Rietveld).

valeurs de $\frac{N}{4\pi}$ en fonction de m, des cylindres et des ellipsoïdes.

La figure 42 donne, d'après [5], μ_a et $\frac{N}{4\pi}$ des cylindres en fonction de μ_t (m variant de 10 à 2 000).

La figure 43 donne, d'après [34], μ_a des cylindres (μ_t variant de 20 à 1000) en fonction de m.

Un autre cas important est celui des circuits magnétiques à petit entrefer *uniforme*. Si $\mathcal{R}_F$ désigne la réluctance du ferrite, $\mathcal{R}_e$ celle de l'entrefer, la réluctance totale sera

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_F + \mathcal{R}_e. \tag{131}$$

Dans le cas d'un circuit magnétique de longueur l de section s uniforme comprenant un entrefer e satisfaisant aux relations

$$e \ll \sqrt{s} \quad \text{et} \quad e \ll l,$$

on a

$$\frac{1}{\mu_a} = \frac{1}{\mu_t} + \frac{e}{l}, \tag{132}$$

et

$$\mu_a = \frac{\mu_t}{1 + \frac{\mu_t e}{l}}. \tag{133}$$

7.4.5. Variation des caractéristiques du ferrite constituant un circuit magnétique ouvert. — Les caractéristiques du circuit magnétique ouvert peuvent être déduites des caractéristiques « intrinsèques » ou « toriques ».

La formule (128) conduit à une formule plus générale que (133)

$$\mu_a = \frac{\mu_t}{1 + \frac{N}{4\pi}\mu_t}. \tag{134}$$

Les variations de μ_a en fonction des divers facteurs examinés ci-dessus seront d'autant plus faibles que N et μ_t sont plus grands. On peut calculer la variation de μ_a :

$$\mu_a = \frac{\Delta\mu_t}{\left(1 + \frac{N}{4\pi}\mu_t\right)^2} \tag{135}$$

et

$$\frac{\Delta\mu_a}{\mu_a} = \frac{\Delta\mu_t}{\mu_t}\,\frac{1}{\left(1 + \frac{N}{4\pi}\mu_t\right)}. \tag{136}$$

Par conséquent

$$\frac{\Delta\mu_a}{\mu_a^2} = \frac{\Delta\mu_t}{\mu_t^2}, \tag{137}$$

d'où

$$\frac{\Delta\mu_a}{\mu_a} = \frac{\Delta\mu_t}{\mu_t^2}\,\mu_a. \tag{138}$$

Cette formule justifie l'emploi de l'expression (115) qui donne directement le coefficient de température de μ_a :

$$\frac{\Delta\mu_a}{\Delta T}\,\frac{1}{\mu_a} = \alpha'\mu_a.$$

La présence de l'entrefer entraîne une déformation des cycles d'hystérésis. Le champ coercitif seul demeure constant. L'induction rémanente B_{ra} pourra être déterminée à partir du cycle d'hystérésis relevé sur un tore en remarquant que cette induction correspondra à un champ démagnétisant

$$H_d = -\frac{N}{4\pi} J_{ra}. \tag{139}$$

On démontre que la tangente de l'angle des pertes et la perméabilité initiale sont liées par la relation approximative

$$\frac{\operatorname{tg}\delta\,\mu_0}{\mu_0} = \frac{\operatorname{tg}\delta(\mu_0)_a}{(\mu_0)_a}, \tag{140}$$

$(\mu_0)_a$ désignant la perméabilité initiale apparente.

Cela revient à dire que le produit μQ est constant.

Les pertes aux champs élevés diminuent également, pour un champ d'amplitude donnée, du fait que l'aire du cycle d'hystérésis diminue lorsque l'épaisseur de l'entrefer croît.

7.4.6. La perméabilité relative μ_e. — Les usagers définissent parfois une perméabilité relative, en particulier dans le cas des barreaux en ferrite.

Cette perméabilité est égale au rapport entre la self-inductance L_f du bobinage muni d'un barreau en ferrite et la self-inductance L_e du même bobinage mesurée en l'absence de ce barreau

$$\mu_e = \frac{L_f}{L_e}. \tag{141}$$

Cette perméabilité dépend de la forme des dimensions du barreau, de μ_0 ainsi que de la forme et des dimensions du bobinage. Elle ne peut donc avoir une signification pratique que si tous ces paramètres sont bien précisés.

8. PRINCIPAUX GROUPES DE COMPOSITIONS DE FERRITES.

Les principaux groupes de compositions de ferrites commerciaux seront examinés en premier lieu.

En se reportant au paragraphe 6 de la première partie de cet article, on comprend aisément que les valeurs des caractéristiques portées dans les diagrammes des compositions chimiques ci-après n'ont rien d'absolu.

8.1. Les ferrites nickel-zinc.

On pourrait appeler les ferrites de ce groupe de compositions : « ferrites pour hautes fréquences ». En effet, certaines compositions de ce groupe sont utilisables dans les circuits accordés jusqu'à 100 à 200 Mc/s.

Les compositions commerciales couvrent en général

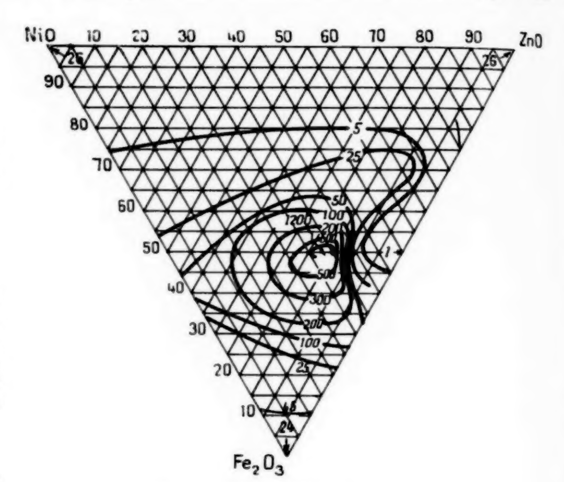


Fig. 44 [1]. — Variations de μ_0.

la gamme : « basses fréquences » à 100 Mc/s avec cinq à sept compositions (*voir*, par exemple, [25], p. 228).

La synthèse de ces ferrites est délicate si l'on veut obtenir de faibles pertes, une perméabilité initiale

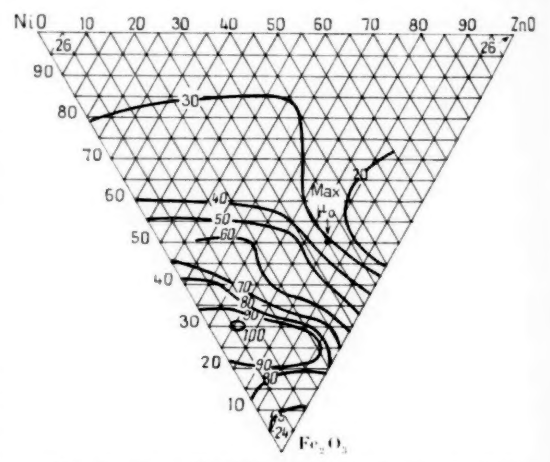


Fig. 45 [1]. — Variations relatives de Q à 500 kc/s.

élevée, un faible coefficient de température, une « sensibilité aux champs perturbateurs » acceptable et une stabilité suffisante.

On a reproduit ci-contre (*fig.* 44, 45, 46, 47) les propriétés des compositions du diagramme NiO, ZnO, Fe_2O_3, frittées à 1400° C [1].

On comparera le diagramme de la figure 44 avec celui de la figure 48, obtenu par N. N. Cholz [37]. N. A. Toropov [36] trouve que les échantillons de ferrite nickel-zinc frittés entre 1180 et 1200° C ne

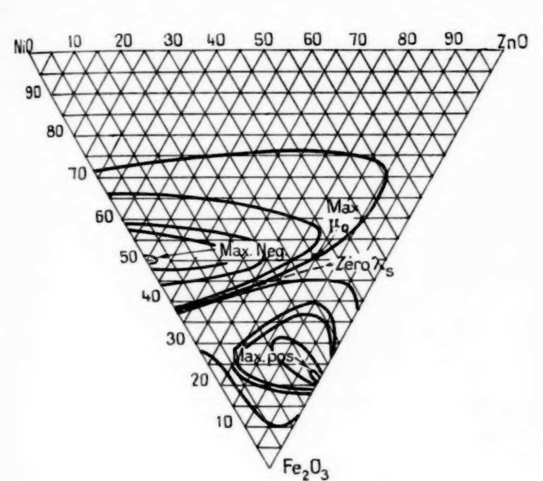


Fig. 46 [1]. — Variations de λ_s.

contiennent presque pas de FeO (0,1 à 0,001 %), tandis que ceux frittés entre 1350 à 1400° C en contiennent de 0,2 à 1 %. Cet auteur a déterminé la zone du diagramme où les solutions solides étaient

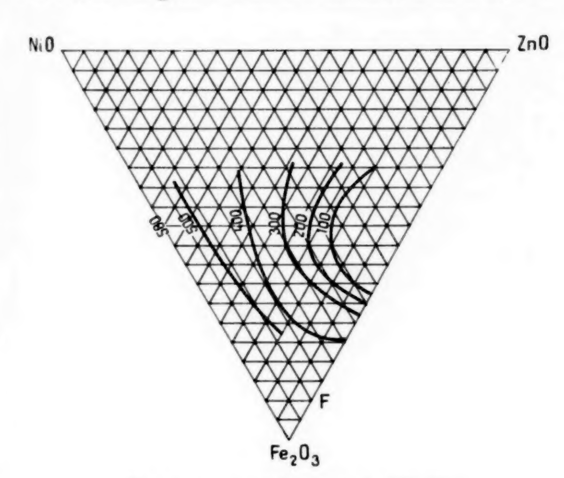


Fig. 47. — Variations de θ_c (°C) [1].

complètes (*fig.* 49). La figure 48 montre que les propriétés peuvent varier très brusquement autour de certaines compositions particulières et à cause de cela, une exploration systématique des diagrammes de compositions peut être nécessaire.

8.2. Les ferrites manganèse-zinc.

Les ferrites manganèse-zinc conviennent principalement aux usages à des fréquences inférieures

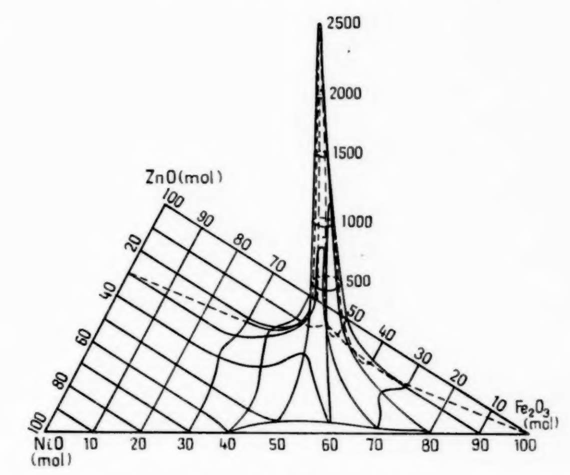


Fig. 48. — Variations de μ_0 [37].

à 2 Mc/s. La synthèse de ces ferrites est délicate. En effet, l'ion Mn^{a+} peut prendre divers états de

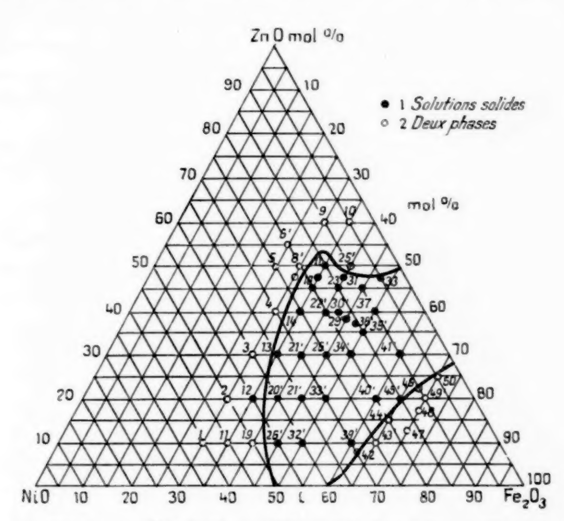


Fig. 49. — ● Solutions solides, ○ à deux phases [36].

valence : $a = 2, 3, 4$ [39], [40], [41] et, d'après certains auteurs (par exemple Pascal [38]), il pourrait même être différent d'un nombre entier. L'ion Fe^{a+} peut également changer de valence : $a = 2$ et $a = 3$.

Ainsi, lorsqu'un mélange d'oxyde de fer et de

bioxyde de manganèse est fritté à l'air, au cours de la montée en température, un certain taux d'ions change de valence suivant un schéma du type :

$$T^{\circ}C : \quad T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3,$$
$$Mn : \quad Mn^{4(+)}\ Mn^{3(+)}\ Mn^{2(+)},$$
$$Fe : \quad Fe^{3(+)} - Fe^{2(+)}.$$

Au refroidissement, des changements inverses ne sont pas exclus. Cependant, au cours du frittage, divers composés peuvent se former [40] : $Mn_3O_4.3Fe_2O_3$, $MnO.Fe_2O_3$. Dans ces conditions, un certain degré de réoxydation du produit peut se produire, des ions Mn et Fe prenant des valences supérieures. Cependant, dans la pratique, cette réoxydation pourra être d'autant moindre que le refroidissement est plus rapide, que le produit est plus « étanche » et que les pièces sont plus grosses.

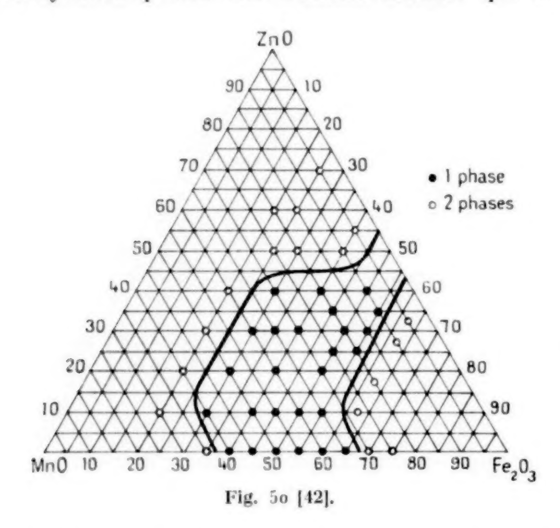


Fig. 50 [42].

Il est assez malaisé de déterminer par des méthodes directes la composition finale du ferrite de manganèse [40] et, par conséquent, celle des ferrites mixtes de manganèse et de zinc.

La composition finale dépend de la température et de la durée du palier de cuisson, de la forme de la courbe de température, surtout dans la zone du refroidissement, de la composition de l'atmosphère du four (O_2, N_2, CO_2, H_2O, etc.) et, dans une certaine mesure, des conditions du préfrittage ainsi que des matières premières. Les propriétés du produit dépendraient, elles aussi, de tous ces paramètres.

La composition de ces ferrites a également été étudiée par N. A. Toropov [42]. Cet auteur a étudié la structure des composés du diagramme MnO, ZnO, Fe_2O_3 (*fig.* 50) et la perméabilité initiale des composés MnO, ZnO, Fe_2O_3, frittés à 1250° C (*fig.* 51). On a également reproduit (*fig.* 52), la valeur de μ_0 des compositions x MnO, $(1 - x)$ Fe_2O_3 [42].

La figure 53 représente les valeurs de μ_0 et

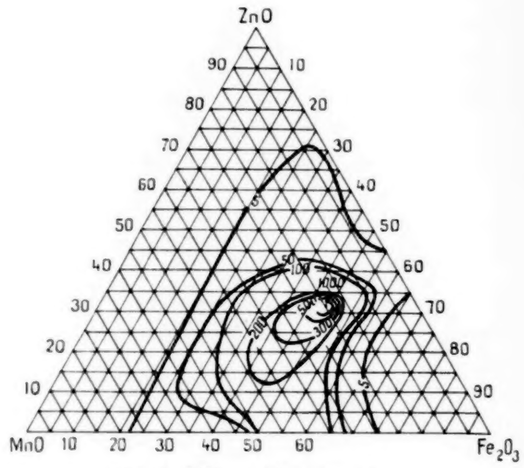


Fig. 51 [42]. — Variations de μ_0.

de θ_c (°C) des compositions du diagramme MnO, ZnO, Fe_2O_3 [43]. Les courbes $\mu_0 =$ const. de cette figure ont une allure différente de celles de la figure 51 (*cf.* le début du paragraphe 8).

Les ferrites de manganèse-zinc à très haute perméa-

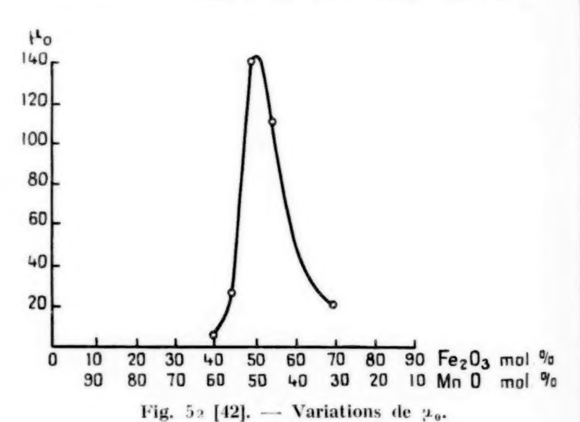


Fig. 52 [42]. — Variations de μ_0.

bilité initiale ont été étudiés et industrialisés en France (C. Guillaud [62], [63], etc.). D'après M. C. Guillaud, on obtiendrait des perméabilités initiales très élevées, jusqu'à 3 000 et même davantage, en employant des matières premières pures et en réglant le procédé de telle sorte que la structure granulaire soit convenable et que le ferrite contienne

sensiblement 50 mol % de Fe_2O_3 ainsi qu'un certain taux de FeO [62]. Le maximum de μ_0 dépend [62], du taux de Fe^{++} (exprimé en Fe_2O_3) et du taux de MnO. Il semble que le taux de FeO soit lié à celui de MnO (pour le maximum de μ_0) par la condition $\lambda_s \# 0$, et les faibles pertes sont obtenues par un compromis entre la valeur de λ_s et celle de la résistivité ρ.

D'après M. C. Guillaud, le choix d'un mode opératoire est très important [63] et les propriétés seraient améliorées (μ_0, α et les pertes) par des ajouts de faibles taux de CaO.

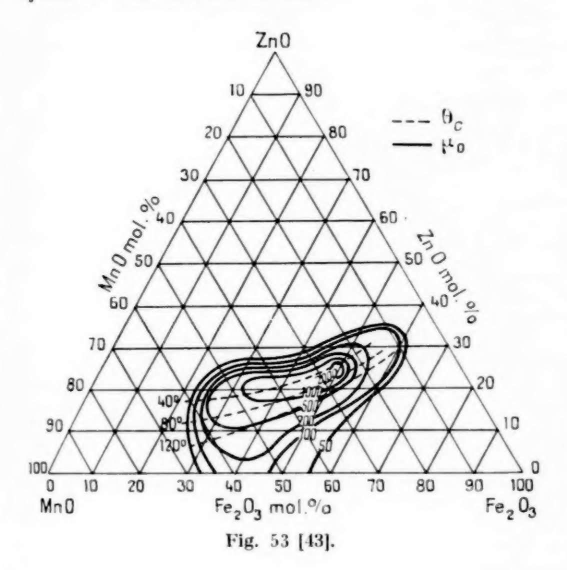


Fig. 53 [43].

8.3. Ferrites mixtes à base de ferrite de magnésium.

On citera le système MgO, FeO, Fe_2O_3 étudié par H. S. Roberts et M. E. Mervin et le système MgO, ZnO, Fe_2O_3, étudié par plusieurs auteurs (*cf.*, par exemple, [43]). La figure 54 représente les valeurs de μ_0 et de θ_0 des compositions de ce type, d'après [43].

Le système le plus intéressant pour les applications actuelles paraît être : MgO, MnO, Fe_2O_3. Dans ce diagramme se trouvent d'importantes compositions pour les applications ultra-haute fréquence et pour les applications dans les systèmes à mémoire (ferrites à cycle d'hystérésis rectangulaire) (*cf.* E. Albers-Schœnberg [44]). De nombreuses compositions comprennent, Fe_2O_3 : 50 à 30 mol %, MnO : 5 à 45 mol %, MgO : 70 à 10 mol % [44].

Parmi ces compositions, on trouve des produits à très haute résistivité, et à faibles pertes diélectriques en ultra-haute fréquence, d'où leur emploi dans ce domaine. Certains produits présentent des cycles d'hystérésis à haut coefficient de rectangularité $\left(\frac{B_r}{B_m} \sim 0{,}96\right)$, d'où leur emploi dans les dispositifs à mémoire ([45] à [52]) B_m. Ces ferrites ont une induction maximum inférieure à 3 000 gauss environ

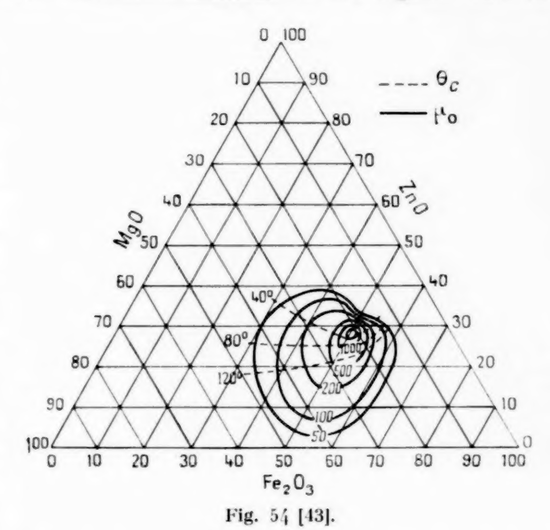


Fig. 54 [43].

et, le plus souvent inférieure à 2 000 gauss. Une importante région du diagramme MnO, MgO, Fe_2O_3 a été étudiée par E. Economos [51]. D'après E. Albers-Schœnberg [53], on obtiendrait des coefficients de rectangularité supérieurs à 0,97 et des champs coercitifs de l'ordre de 0,2 Oe, grâce à l'addition

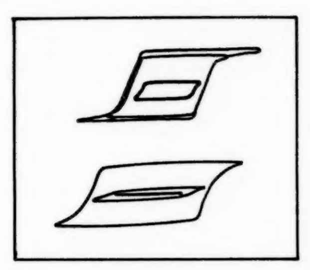


Fig. 55 [44].

de CaO. On trouvera des détails sur les applications de ces ferrites, sur les caractéristiques recherchées et sur les conditions de fonctionnement dans [45] à [50], [52].

Les figures 55 et 56 (d'après E. Albers-Schœnberg [44]) montrent l'évolution des cycles d'hystérésis rectangulaires en fonction de l'amplitude du champ et en fonction de la température.

Les bases théoriques justifiant le caractère « rectangulaire » et les propriétés de ces ferrites ne paraissent pas être bien établies dans la littérature. Il semble que la rectangularité des cycles d'hystérésis des ferrites peut être obtenue, indépendamment, par la composition ou par des procédés connus dans la métallurgie : orientation des grains, orientation thermomagnétique, contraintes mécaniques, etc. [5].

D'après M. Kornetzki [54], la « rectangularité » des cycles d'hystérésis des ferrites du système MgO, MnO, Fe_2O_3 serait « isotrope » et, par conséquent, ces produits auraient un cycle d'hystérésis pseudo-rectangulaire. Le système de composition MgO, MnO, Fe_2O_3 ne serait pas le seul dans lequel on trouve des cycles d'hystérésis de forme rectangulaire (divers brevets récents).

optimum. Aux faibles champs et aux champs trop forts, le « rétrécissement » s'atténue considérablement ou disparaît.

Un frittage trop poussé et une trempe conduisent à des cycles normaux ou à tendance rectangulaire. Un traitement thermomagnétique, dans un champ longitudinal, conduirait à un cycle rectangulaire. Si ce traitement est fait dans un champ transversal, on obtiendrait un cycle « couché ». Les modifications dues aux trempes, recuits et traitements magnétiques seraient réversibles.

Les figures 57, 58, 59, reproduites d'après M. Kornetzki [56] illustrent : l'effet du degré du frittage (*fig.* 57), l'effet de la température (*fig.* 58) et l'effet du traitement thermique et thermomagnétique (*fig.* 59).

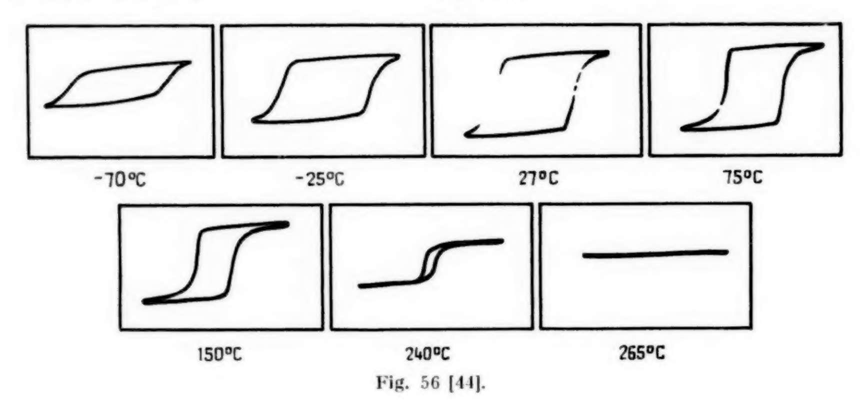


Fig. 56 [44].

Le cas des ferrites pour ultra-hautes fréquences ne sera pas abordé ici et fera, ultérieurement, l'objet d'une publication particulière.

8.4. Ferrites à plus de deux composants.

Dans les paragraphes précédents, on a déjà mentionné l'addition de CaO aux systèmes MnO, ZnO, Fe_2O_3 et MgO, MnO, Fe_2O_3.

On trouve dans la littérature des articles décrivant d'autres compositions : NiO, ZnO, CuO; Fe_2O_3-MgO; NiO, ZnO, MnO_2, Fe_2O_3 ayant des perméabilités maxima et des inductions de saturation assez élevées [55].

Le système NiO, ZnO, CoO, Fe_2O_3 est remarquable par la forme du type « perminvar » [5] des cycles d'hystérésis, de certaines compositions convenablement traitées [56], [57].

D'après M. Kornetzki [56], on obtient des cycles rétrécis grâce à un choix du degré de frittage et grâce à un recuit. Le caractère « rétréci » des cycles d'hystérésis est plus marqué pour un champ

Ces produits, à cycle d'hystérésis rétréci, présentent aux champs faibles de très faibles pertes par hystérésis : le cycle de Rayleigh est très étroit. On obtiendrait ainsi des ferrites à coefficient de surtension $Q = \frac{1}{\operatorname{tg}\delta}$ très élevé.

8.5. Autres compositions.

On se contentera de mentionner quelques compositions ayant actuellement une moindre importance industrielle ou n'ayant pas encore reçu d'applications : Le système CuO, PbO, Fe_2O_3 [58], le système Li_2O, ZnO, Fe_2O_3 [59], les ferrites des terres rares [60], les ferrites de cuivre [61], etc.

9. COMPARAISON ENTRE LES FERRITES NICKEL-ZINC ET MANGANÈSE-ZINC

On pourrait se reporter aux catalogues de divers fabricants pour comparer les caractéristiques de ces

ferrites. Dans ces lignes, on se contentera d'indiquer quelques ordres de grandeurs.

On a vu qu'on peut obtenir des ferrites nickel-zinc et manganèse-zinc dont la perméabilité initiale dépasse 2 000. De même, on peut obtenir des inductions maximum de l'ordre de 4 000 gauss dans les deux groupes de compositions.

Cependant, aux basses fréquences, les pertes aux champs faibles sont bien plus faibles dans les ferrites manganèse-zinc que dans les ferrites nickel-zinc (*fig.* 60). Par contre, aux hautes fréquences, ce sont les secondes qui l'emportent sur les premières.

Cet effet est d'autant plus marqué que la perméabilité initiale du ferrite de nickel est plus faible.

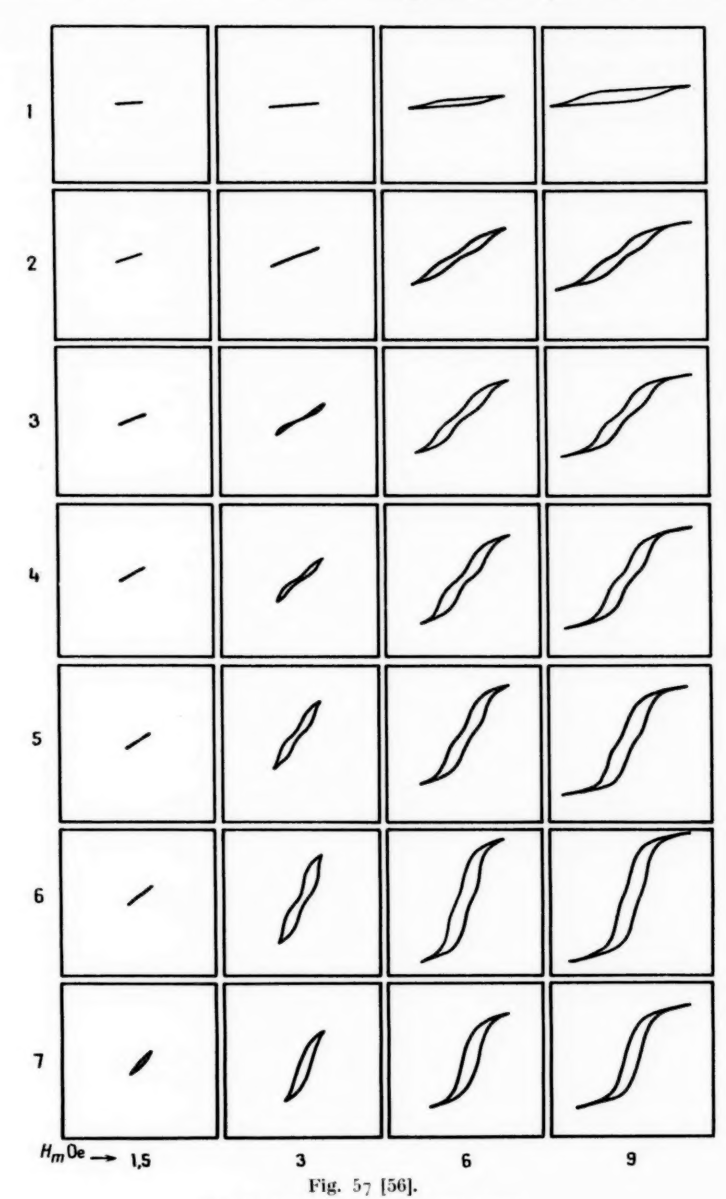


Fig. 57 [56].
1 à 7, degrés de frittage croissants.

On remarquera également que le coefficient de température α' des ferrites manganèse-zinc est souvent très faible (quelques unités $.10^{-6}$). Aux champs de grande amplitude, l'avantage revient également aux ferrites manganèse-zinc, tant qu'on se limite à des fréquences assez basses. *Assez arbitrairement*, on pourrait fixer 1 Mc/s comme fréquence séparant les domaines d'application des deux types de compositions.

Dans le tableau ci-après, on donne l'ordre de grandeur de quelques caractéristiques physiques des deux types de ferrites :

Densité (g/cm³)	4 à 4,8
Coefficient de dilatation linéaire (par °C)	120.10^{-7}
Chaleur spécifique (cal/g/°C)	0,2
Conductibilité thermique (cal/cm/s/°C)	10^{-2}
Module d'Young (kg/cm²)	$1,5.10^{-6}$

10. QUELQUES CONSIDÉRATIONS D'ORDRE PRATIQUE.

Les pièces en ferrite sont mises en forme avant la cuisson, soit par moulage (ou matriçage), soit par

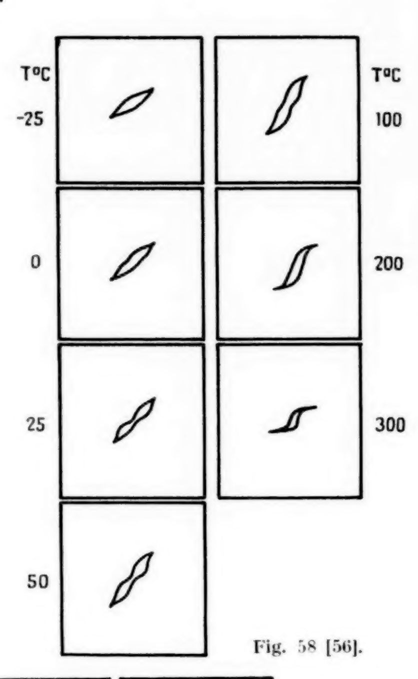


Fig. 58 [56].

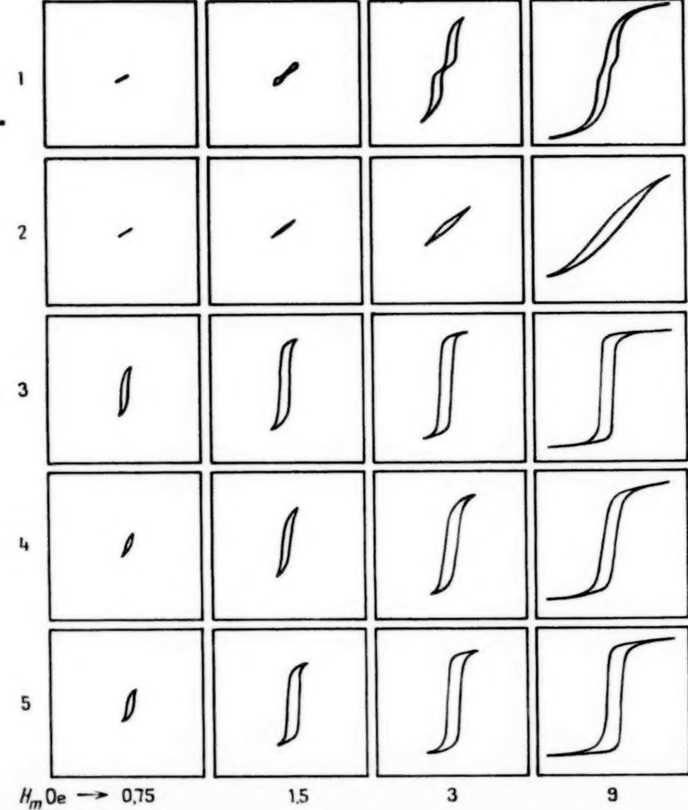


Fig. 59 [56].

1, recuit.
2, recuit sous champ transversal.
3, recuit sous champ longitudinal.
4, trempe.
5, même ferrite (sans CoO) recuit.

filage (ou extrusion). Le matriçage permet de réaliser des formes très diverses y compris des barreaux. Le filage convient à la réalisation de barreaux de section uniforme.

On a vu que, lors de la cuisson, les pièces prennent un retrait (10 à 20 % environ). On admet souvent environ ± 1 % de tolérance sur la variation du retrait. Les pièces pressées peuvent avoir des défauts comme « l'ovalisation », une « conicité », etc. dus aux hétérogénéités de pressage ou de cuisson.

Les pièces de forme allongée, surtout les pièces filées, ont souvent une « flèche ». Si l'on désire des

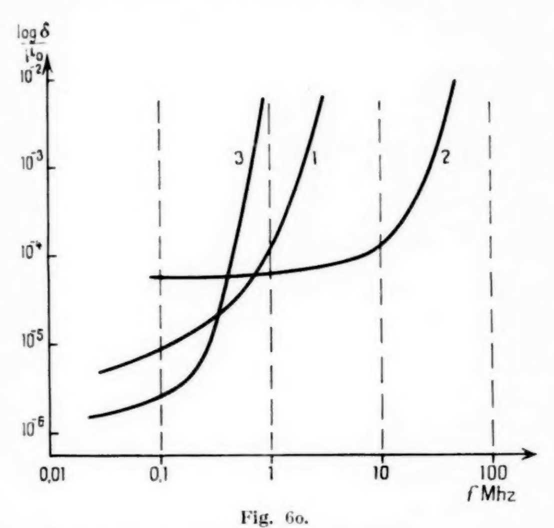


Fig. 60.

1, ferrite NiZn à haute perméabilité initiale $\mu_0 \sim 1000$.
2, ferrite NiZn à basse perméabilité initiale $\mu_0 \sim 20$.
3, ferrite MnZn à haute perméabilité initiale $\mu_0 \sim 1000$.

pièces de forme parfaite et une très faible tolérance sur les dimensions, on procède à une rectification à l'aide de meules au diamant. L'usinage des ferrites s'effectue à l'aide de forets, de meules ou de disques garnis de diamant.

11. QUELQUES CAS D'EMPLOIS TYPIQUES.

11.1. Généralités.

Les ferrites sont employés aux fréquences dépassant quelques kilocycles. En dessous de 10 kc/s, les ferrites actuels ne paraissent pas avoir concurrencé les tôles en fer ou en alliages perméables. Cela semble tenir principalement à la faible valeur du moment de saturation des ferrites.

La haute perméabilité et le facteur de mérite $\frac{\operatorname{tg}\delta}{\mu_0}$ élevé des ferrites permettent souvent la réalisation de self-inductances *plus petites*, *plus stables* et de *plus haute qualité* que celles réalisées avec des pièces en fer carbonyle aggloméré.

Les diverses applications des ferrites ont été citées dans de nombreuses publications. On citera celle de K. E. Latimer et H. B. Mac Donald [65].

On examinera rapidement quelques emplois les plus courants.

11.2. Les pots en ferrite.

L'usage des pots en ferrite est assez général : bobines de Pupin, self-inductances de haute qualité des équipements radioélectriques professionnels, filtres, transformateurs haute fréquence, transformateurs de moyenne fréquence, en particulier ceux des récepteurs radioélectriques à transistors, etc.

Le pot en ferrite présente les avantages ci-dessus et, en plus, il constitue un blindage pour la self-inductance.

L'utilisation des pots implique : le choix du ferrite, le choix du type de pot, le choix du fil, la détermination de l'entrefer optimum et le choix des moyens d'ajustement de la self-inductance.

Ces éléments sont choisis d'après les caractéristiques données par le fabricant, et en fonction des données imposées par l'emploi : fréquences d'utilisation, valeur minimum du facteur de qualité, coefficient de température minimum, dérive maximum en fonction d'un champ superposé, plage de réglage de la self-inductance, amplitude maximum du courant haute fréquence et le taux d'harmonique 3 maximum.

Le calcul détaillé d'un pot classique a été développé par J. Arrazau [66]. D'après J. Arrazau, en pratique, la précision du calcul est de l'ordre de 10 à 15 %. Donc, si la plage de réglage de la self-inductance est inférieure à 15 %, on doit prévoir un ajustement du nombre de spires du bobinage.

Le facteur de qualité est maximum lorsque la relation classique : pertes dans le ferrite = pertes dans le fil, est satisfaite. Les pertes de la « capacité répartie » du bobinage viennent s'ajouter aux deux précédentes.

Pour une estimation rapide de divers paramètres guidant le choix d'un pot, on peut procéder comme suit : si l'on peut admettre que la perméabilité initiale du matériau est assez élevée pour que la réluctance du pot soit négligeable devant celle de l'entrefer, la formule (133) se réduit à

$$\mu_a = \frac{l}{e}. \tag{142}$$

Si l'on désigne par k une constante (calculable à partir des dimensions du pot) et par n le nombre de spires, la self-inductance sera [*voir* la formule (97)]

$$L = 4\pi n^2 k \mu_a . 10^{-3} (\mu H). \tag{143}$$

La résistance équivalente aux pertes dans le ferrite sera

$$R_f = L\omega \frac{l \operatorname{tg} \delta}{e \mu_0}. \tag{144}$$

Le coefficient de température sera

$$\alpha_a = \alpha' \frac{l}{e}. \tag{145}$$

Connaissant la résistivité ρ_f du fil à la fréquence f, le diamètre de ce dernier et le nombre de spires n, on peut calculer la résistance propre du bobinage R_b.

Ces éléments permettent dans certains cas de dégrossir le problème avant de recourir au calcul plus détaillé [66].

11.3. Les noyaux et les tiges cylindriques.

Ces pièces sont utilisées dans les self-inductances ajustables; on citera à titre d'exemples d'emploi les transformateurs « moyenne fréquence » des postes récepteurs de radiodiffusion, les self-inductances des filtres haute fréquence et même les self-inductances variables pour l'accord des circuits haute fréquence de certains postes de radiodiffusion.

Le coefficient de surtension et la perméabilité relative (*voir* § 7.4.6) dépendent de trop nombreux paramètres, et l'on doit examiner le problème suivant les cas d'espèces.

11.4. « Antennes », cadres à barreaux en ferrite.

Il est courant d'attribuer aux antennes cadres à barreau en ferrite, les avantages suivants : un encombrement réduit, une sensibilité réduite aux parasites du type électrostatique produits par des sources de parasites proches, un coefficient de surtension élevé.

Si l'on considère un barreau en ferrite 1 (*fig.* 61) disposé parallèlement au champ magnétique uniforme $H_{\rm H}$ d'une onde électromagnétique de fréquence f rayonnée par un émetteur, on voit que le ferrite provoque une déformation locale (a) de ce champ.

Si l'on admet que dans le ferrite, le champ est uniforme, on peut définir une perméabilité apparente μ_a (*cf.* § 7.4.4 qu'on déterminera grâce courbes des figures 42 ou 43. Par exemple, si $m = 20$ et $\mu_0 = 200$, $\mu_a = 100$. On remarquera que, vis-à-vis du bobinage 2, le barreau en ferrite aura une perméabilité relative de l'ordre de 15 et le champ rayonné par le barreau au cas où l'on alimente la bobine (2) formée de N spires avec du courant haute fréquence aura une configuration telle que b (*fig.* 61). Lorsqu'on branche la bobine (2) aux bornes d'un condensateur

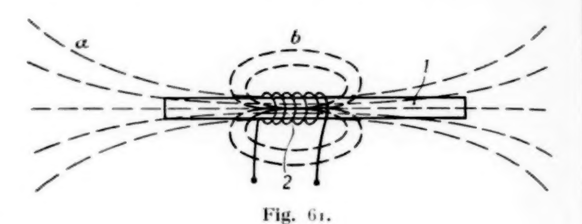


Fig. 61.

variable CV (*fig.* 62) et l'on accorde le circuit oscillant ainsi formé, la tension de haute fréquence $V_{\rm HF}$ due au champ H sera

$$V_{\rm HF} = 2\pi f H \mu_a N s Q . 10^{-8}\ {\rm V}, \tag{146}$$

s étant la surface d'une spire en centimètres carrés et Q le coefficient de surtension du circuit oscillant.

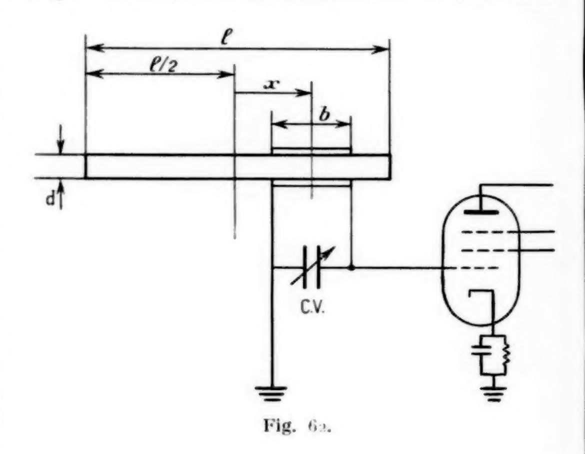


Fig. 62.

La hauteur effective h de cette antenne-cadre non accordée sera

$$h = \frac{2\pi s N F_m \mu_a}{\lambda} . 10^{-4}\ {\rm m}. \tag{147}$$

où F_m désigne un facteur correctif introduit pour tenir compte de la non-uniformité du flux dans le barreau à l'endroit où se trouve la bobine et λ est la longueur d'onde (dans l'air) de l'onde radioélectrique.

Pour une discussion détaillée, on se reportera à [34].

Pour terminer, on fera quelques remarques d'ordre général. La self-inductance L de la bobine b et le coefficient de surtension Q du circuit oscillant varient lorsqu'on déplace cette bobine le long du barreau en ferrite (*fig.* 63). Pour des raisons pratiques [maintien mécanique du barreau, existence éventuelle de deux bobines sur chaque moitié du barreau, l'un pour les « petites ondes » (P. O.), l'autre pour les « grandes ondes » (G. O.)] la bobine b est scindée en deux portions, l'une fixe, située vers le milieu du barreau, l'autre mobile, située vers l'extrémité de celui-ci. La partie mobile sert à « l'alignement » du poste récepteur.

Lorsqu'on reçoit les grandes ondes, les bobinages P. O. et G. O. sont branchés en série et

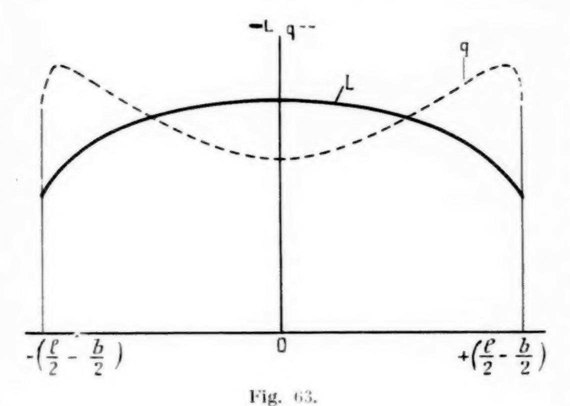


Fig. 63.

lorsqu'on veut recevoir les petites ondes, le bobinage G. O. est, soit mis en court-circuit, soit branché en parallèle sur la bobine P. O. Dans certains postes, l'antenne est fixe; dans d'autres, elle est orientable autour d'un axe vertical, et l'on doit éviter autant que possible qu'au cours du mouvement d'orientation, une extrémité du barreau en ferrite soit exposée aux champs de fuite du haut-parleur, du transformateur d'alimentation et du transformateur de sortie de la basse fréquence (*cf.* § 7.4.2.5).

Le champ de fuite pourra polariser le ferrite à l'induction rémanente, ce qui peut entraîner une variation de la perméabilité μ_a et, par conséquent, le désaccord du poste. Les champs de fuite alternatifs pourront exercer deux effets :

a. Une variation de la hauteur effective h due à la variation de μ_a (*cf.* § 7.4.2.5), d'où une modulation parasite;

b. Une variation périodique de la valeur de μ_a et, par conséquent, de la self-inductance de la bobine b, d'où une variation alternative ou pulsée de l'accord du circuit oscillant, entraînant une seconde modulation parasite. Ces deux modulations parasites peuvent se traduire par un accroissement du bruit du poste et même par des « ronflements » et par des « accrochages ».

Que pourrait être une antenne optimum ?

L'étude devrait porter sur le matériau, sur la forme et sur la disposition de l'antenne.

Pour des raisons pratiques (prix, encombrement, etc.), on supposera qu'on se limite au cas d'un seul barreau de 10 mm de diamètre et de 200 mm de longueur. On admettra que le poste possède la gamme des grandes ondes (G. O.) et celle des petites ondes (P. O.). Les bobinages G. O. et P. O. sont scindés en deux parties : l'une fixe, l'autre mobile comme ci-dessus. L'antenne sera optimum lorsque V_{HF} (146) est maximum, ce qui implique que le produit $(N\mu_a Q)$ est maximum. Le coefficient de surtension Q en charge est limité par la bande passante du circuit d'entrée. La valeur de μ_a (*fig.* 43) pour $m = 20$ augmente avec μ_0, mais N diminue, car la valeur de la self-inductance d'antenne doit rester constante, si l'on emploie des condensateurs variables d'un type courant.

Par conséquent, le produit $N\mu_a$ doit tendre vers une limite pratique, laquelle pourrait se situer vers $\mu_0 = 600$.

La disposition de l'antenne dans le poste a une grande importance. En effet, la proximité des masses métalliques peut provoquer une chute du coefficient de surtension et modifier la self-inductance. Pour éviter les modulations parasites mentionnées ci-dessus, il faudrait éloigner l'antenne du haut-parleur et des transformateurs, ou tout au moins, diminuer les fuites magnétiques par un blindage ou par un choix convenable de ces pièces détachées, lesquelles sont parfois calculées au plus juste, et il arrive que les dimensions du poste soient réduites au strict minimum, de telle sorte que l'antenne est placée dans des conditions de fonctionnement défavorables.

On rappellera en passant le rôle du coefficient de température qui peut faire dériver l'accord du récepteur.

La majorité des ferrites utilisés pour de tels barreaux étaient du type nickel-zinc dont la perméabilité initiale ne dépassait guère 300. On trouve maintenant des antennes-cadres en ferrite manganèse-zinc dont la perméabilité initiale dépasse 500 et présentant une chute rapide du coefficient de surtension, à partir de 1,5 Mc/s. Cette propriété

peut être avantageuse du fait qu'elle réduirait considérablement les risques d'interférences avec la gamme des ondes courtes, lesquelles se traduisent souvent par des sifflements désagréables.

11.5. Transformateurs de puissance.

Les ferrites sont tout indiqués pour la réalisation des noyaux pour les transformateurs de puissance de haute fréquence.

Le choix des matériaux, de la forme et des dimensions du noyau est guidé par les courbes $B = f(H)$ et par les courbes donnant les pertes en fonction de la valeur de l'induction B et de la fréquence f.

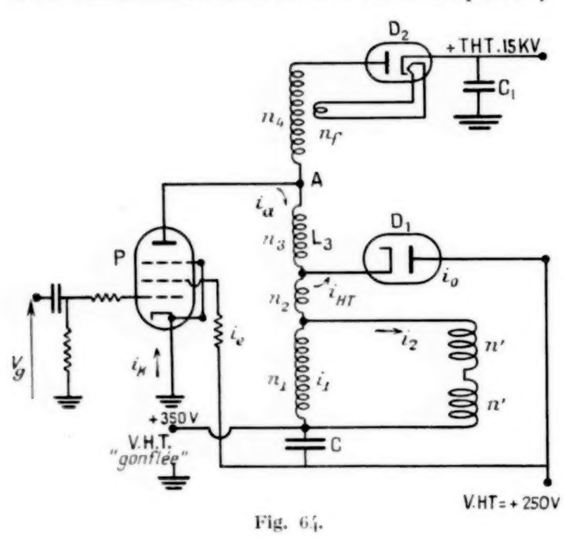


Fig. 64.

Ces courbes sont souvent données dans le catalogue du fabricant de ferrites.

Un cas très intéressant est celui du transformateur de courant de balayage des lignes pour les récepteurs de télévision.

En fait, il faut considérer tout le « bloc » ou toute la fonction « balayage des lignes » dont le schéma est représenté figure 64.

Une étude complète dépasserait le cadre de cet article. On se limitera à un essai d'analyse qualitative. La figure 65 représente une disposition pratique des bobinages de l'autotransformateur de la figure 64 sur un circuit magnétique formé par deux noyaux en U, 1 et 2 en ferrite.

En régime permanent et à l'instant t_1, la tension idéalisée V_g (*fig.* 66 *a*) débloque la pentode P. A cet instant, le point A était porté à $V_{HT} = 250$ Volt (par exemple) et cette tension tombe à une valeur

$$V_{2HT} = V_{HT} - L_1 \frac{di_a}{dt}.$$

Le courant i_a croît linéairement (en première approximation) jusqu'à l'instant t_2 (*fig.* 66 *b*), où la lampe P est bloquée par la chute de la tension (*a*). Ce blocage devrait exciter une oscillation amortie (*oa*, *fig.* 66 *b*). Cette oscillation est redressée par la diode D, de telle sorte qu'elle se réduit à une demi-

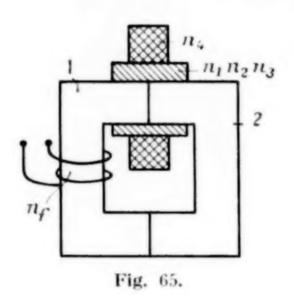


Fig. 65.

période entre t_2 et t_3. A partir de t_3, la croissance du courant est sensiblement linéaire, jusqu'à l'instant t_4 où la lampe P est de nouveau débloquée.

On peut se rendre compte que les bobines de déflexion n' (*fig.* 64) seront parcourues par un cou-

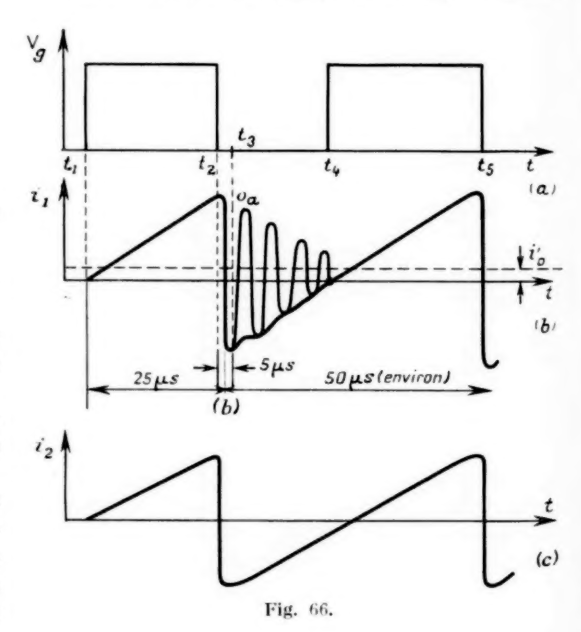


Fig. 66.

rant en dents de scie (*fig.* 66 *c*) et que le condensateur C_1 sera chargé à une tension continue supérieure à V_{HT}.

Lors du « retour du balayage » entre t_2 et t_3, l'anode de la diode D_2 se trouve portée à une tension positive d'autant plus élevée que la variation du flux $\Delta\Phi$

dû à la variation de l'induction dans les noyaux et le nombre de spires n_1 seront plus élevés.

Cette impulsion de tension charge le condensateur C et elle sert à l'alimentation en très haute tension du tube oscillographe. La cathode de la diode D_2 est chauffée par un courant prélevé sur le transformateur même (enroulement n_f, *fig.* 64 et 65).

L'énergie W_{HT}, fournie par la source de courant haute tension, peut se décomposer en plusieurs termes :

$W_b \neq 0$ ou énergie de balayage appliquée aux électrons du tube cathodique par les bobines n';

W_{HT_2}, prélevée éventuellement sur C_1;

W_c, représentant les pertes totales dans les fils des bobinages;

W_r, énergie perdue par le rayonnement des fuites magnétiques;

W_f, énergie utilisée pour le chauffage de la cathode de la diode D_2;

W_{THT}, energie consommée pour l'accélération des électrons du tube oscillographe;

W^1_{fer}, énergie dissipée dans les noyaux en ferrite du transformateur;

W^2_{fer}, énergie dissipée dans les bagues en ferrite du dispositif de déflexion associées aux bobines n'.

En résumé :

$$(148) \qquad W_{HT} = W_b + W_{HT_2} + W_c + W_r + W_f + W_{THT} + W^1_{fer} + W^2_{fer}.$$

Or on pourrait écrire

$$(149) \qquad W_{HT} = i_0 V_{HT}.$$

i_0 étant le courant continu de la plaque de la lampe P.

Par conséquent, i_0 est proportionnel aux pertes totales dans le système. En développant i_1 en série de Fourrier, on trouvera un terme constant (*fig.* 66 *b*)

$$i'_0 = \frac{n_3}{n_2} i_0.$$

Il en résulte que le ferrite se trouve dans le cas des champs de grande amplitude avec un champ continu superposé. L'état magnétique dynamique correspondra à celui de la figure 31 (cycles d'hystérésis dissymétriques).

En pratique, on cherche à obtenir une très haute tension donnée (avec un débit maximum donné) et une largeur de balayage donnée, ce qui fixe la valeur de W_{THT} et celle du minimum de i_2 (et, par conséquent, celle de i_1). Ces deux conditions devraient être satisfaites tout en ayant un courant i_c inférieur à une limite imposée par la durée de vie de la lampe P et un courant de plaque i_0 inférieur à une limite donnée imposée par la puissance maximum délivrée par la source d'alimentation de la haute tension.

En examinant l'expression (148), on voit qu'on pourrait agir sur les termes W_c, W^1_{fer} et W^2_{fer}. En pratique, W^2_{fer} est nettement plus faible que les deux autres termes, car le circuit magnétique de balayage a un très large entrefer. Il reste comme paramètre le choix des deux noyaux en U. Les dimensions de ces noyaux sont fixées par des considérations d'ordre pratique : prix, évacuation des calories, encombrement, etc. Les performances recherchées reposent donc sur les propriétés du ferrite constituant ces noyaux : la perméabilité d'amplitude (compte tenu de l'existence de i_0) déterminant le nombre de spires n_1, n_2, n_3 et n_4 (donc W_c) et les pertes dans le ferrite W^1_{fe}, dont dépend la valeur de i_0 et indirectement celle de i_c.

Les mesures directes, dans les conditions d'emploi, de la perméabilité d'amplitude et celle des pertes ne paraissent pas être faciles. La mesure de la perméabilité d'amplitude à 50 c/s avec un champ donné est aisée moyennant quelques précautions.

Cette mesure quoiqu'imparfaite est souvent adoptée dans la pratique pour les contrôles de fabrication ou de réception des noyaux en U. Il semble que le problème de la mesure industrielle des pertes ne soit pas encore résolu d'une manière satisfaisante.

Le calcul et la mise au point du transformateur de balayage des lignes ne sont pas faciles. Il faut alors considérer toute la fonction, y compris la lampe de puissance P et le bobinage de déflexion proprement dit. Le calcul est facilité par des courbes et par des abaques donnant notamment la perméabilité d'amplitude, l'induction maximum et les pertes en fonction de la fréquence, de l'amplitude du champ alternatif et du champ continu superposé.

En toute rigueur, la mesure des pertes devrait tenir compte de la forme du courant et il est probable que certaines différences existent entre les pertes dues à un courant sinusoïdal et celles dues à un courant en dents de scie de même amplitude de crête et de même fréquence de récurrence.

Enfin, on pourrait remarquer que pour leur mesure, on devrait tenir compte de la *température ambiante*, et de celle que la pièce *atteint au cours de la mesure* ou en régime d'utilisation.

11.6. Autres applications des ferrites.

A titre d'exemples, on citera les applications des ferrites dans le chauffage haute fréquence par induction, les self-inductances de choc, lesquelles peuvent se réduire à des simples anneaux ou « perles » enfilés sur un conducteur, les transformateurs d'impulsions, les générateurs d'harmoniques, les circuits magnétiques pour champs de fréquence variable dans certains accélérateurs de particules, les filtres à magnétostriction, les inductances variables par une commande électrique ou électromagnétique.

Quelques remarques. — On trouve dans la littérature technique des publications consacrées à l'effet Hall, l'effet Tchérenkov, etc. dans les ferrites. Cependant, il ne semble pas que ces études aient conduit jusqu'à présent à des applications pratiques.

On trouve également des publications consacrées aux composés hexagonaux à base d'oxyde de fer et d'oxydes alcalinoterreux, ainsi que des composés magnétiques du type « grenat » (garnet). Ces produits ne sont pas des ferrospinelles et ne rentrent pas dans la catégorie des composés faisant l'objet de cet article.

CONCLUSION.

Les ferrites ont été étudiés depuis fort longtemps en France, en Allemagne, au Japon, etc. Ce n'est qu'après 1940 que ces matériaux ont été développés industriellement, d'abord par la Compagnie Philips et ensuite par d'autres firmes.

Les travaux des chercheurs et des savants de divers pays ont permis de mieux comprendre ce domaine et ont conduit à la découverte de nombreuses propriétés intéressantes de ces produits : MM. Snoek, Wijn, Gorter, Went, et bien d'autres en Hollande; MM. Kornezki, Eckert en Allemagne; MM. Hogan, Albers-Schœnberg, Rado, Weisz aux États-Unis, pour ne citer que quelques noms parmi les plus connus en France.

La France a apporté une contribution de tout premier ordre, grâce à M. Louis Néel dont les travaux constituent la base même de la théorie du magnétisme des ferrites : le ferrimagnétisme et grâce à M. C. Guillaud, dont les travaux à part leur valeur sur le plan théorique, ont conduit à la mise au point de ferrites de manganèse ayant des perméabilités jamais atteintes jusqu'alors sur le plan industriel.

Malgré une différence fondamentale entre le ferromagnétisme des métaux et le ferrimagnétisme des ferrites, dans de nombreux cas, la structure magnétique macroscopique et les processus de l'aimantation macroscopique paraissent être semblables dans les deux types de substances.

Le moment de saturation relativement faible des ferrites et le champ coercitif assez élevé n'ont pas permis jusqu'à présent une extension de l'emploi des ferrites aux basses fréquences, en remplacement des noyaux en tôles métalliques à haute perméabilité et à haute saturation.

Cependant, la résistivité élevée des ferrites a permis la généralisation de leur emploi depuis quelques kilocycles jusqu'aux ondes décimétriques et même jusqu'aux ondes millimétriques, où l'on utilise leurs propriétés non réciproques.

Les principaux domaines d'emplois actuels sont les transmissions par câbles (bobines de Pupin), les récepteurs de radiodiffusion et de télévision, les machines à calculer utilisant des tores ou des pièces en ferrite à cycles d'hystérésis rectangulaires et les dispositifs non réciproques en ultra-hautes fréquences.

On a vu que la synthèse des ferrites offre une ressemblance formelle avec celle des autres produits céramiques à base d'oxydes. Cependant, dans le cas des ferrites, la synthèse est particulièrement délicate, car les propriétés des ferrites résultent non seulement de la composition chimique nominale, mais également de la forme physique et chimique des matières premières et de toutes les étapes du procédé de fabrication — surtout les traitements thermiques — conduisant à une structure granulaire convenable. Certaines impuretés sont nuisibles, d'autres favorisent ou facilitent l'obtention de la structure granulaire désirée, peut-être dans certains cas, par une diffusion sélective de certains ions vers la surface des grains.

Il en résulte que la composition chimique nominale est à elle seule un élément insuffisant pour caractériser un produit ayant des propriétés données.

La technologie peut se réduire à un certain nombre d'opérations — apparemment simplistes — en tout cas, d'autant plus simples que l'étude fondamentale est plus poussée dans le sens industriel. Les raisons profondes de certains détails peuvent ne « pas être évidents ».

Il semble qu'on peut distinguer deux points de vue : celui consistant à obtenir des propriétés maxima quel qu'en soit le prix, ce qui peut être justifié dans des cas spéciaux (matériel professionnel, etc.) et un second orienté vers la production « grand public », ou en général vers la production de grande série où le problème est plus subtil, car il consiste en un

choix d'un compromis optimum entre la qualité et le prix.

Chaque fabricant ayant une base et une technologie propres, il en résulte que les produits peuvent être équivalents sans être *a priori* interchangeables dans tous les cas, les différences n'apparaissant que dans des cas d'emploi extrêmes favorisant l'un des produits par rapport à un autre et inversement dans un cas d'utilisation différent.

Une pièce en ferrite ne peut pas être considérée comme une pièce détachée (Component) et il semble nécessaire de considérer une pièce en ferrite comme un élément de base d'une pièce détachée comprenant le ferrite, le ou les bobinages associés à celui-ci, etc., cette pièce détachée étant conçue en vue d'une fonction bien définie, et en tenant compte des propriétés du ferrite et des diverses données constituant un Cahier des Charges pour ladite fonction. On citera par exemple le cas des antennes-cadres à barreau en ferrite et celui du transformateur de balayage des lignes des téléviseurs, examinés à la fin de cet article.

Il serait utile d'attirer encore l'attention sur la complexité, l'interdépendance des propriétés des ferrites : les diverses perméabilités, divers coefficients de température, diverses pertes et compte tenu des divers cas d'emplois : circuits magnétiques fermés, ceux à petit entrefer ou les circuits magnétiques franchement ouverts.

On pourrait formuler le souhait qu'une normalisation internationale puisse aboutir afin d'unifier les termes et les définitions dont la diversité ne fait qu'augmenter les difficultés de ce domaine qui est déjà complexe en soi.

Il semble enfin qu'on n'ait pas encore épuisé les possibilités de ce domaine et il n'est pas exclu que des emplois paraissant aujourd'hui secondaires prennent un développement considérable.

BIBLIOGRAPHIE.

[24] Snoek, *Nature*, t. 160, 1947, p. 90; *Physica*, t. 14, 1948, p. 207.

[25] J. J. Went et E. W. Gorter, *Rev. Techn. Philips*, t. 13, n° 8, 1952, p. 221-256.

[26] R. Feldtkeller et O. Kolb, *Z. für Angew. Phys.*, t. 4, n° 12, 1952, p. 448-452.

[27] G. T. Rado et All., *R. C. A. Rew.*, t. 80, 2 octobre 1950.

[28] G. W. Rathenau et J. F. Fast, *Physica*, t. 21, 1955, p. 964-970.

[29] J. Y. Lascroel, *Câbles et Transmissions*, n° 4, octobre 1953.

[30] H. J. Lindenhovius et J. C. van den Breggen, *Phil. Res. Rep.*, t. 3, 1948, p. 37-45.

[31] R. S. Weisz, *The Phys. Rev.*, t. 96, n° 3, novembre 1954, p. 800-801.

[32] A. P. Komar et N. M. Rejnov, *Dokl. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, t. 93, n° 1, 1953.

[33] L. I. Rabkin, *Isz. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, t. 18, n° 4, série *Phys.* 1954, p. 473-488.

[34] H. Block et J. J. Rietveld, *Rev. Techn. Phil.*, n° 6, décembre 1954, p. 165-204.

[35] L. Prache, *Structures granulaires ferromagnétiques*, Dunod, 1957.

[36] N. A. Toropov et All., *Zur. Techn. Phys.*, t. 23, n° 9, 1933, p. 1541-1547.

[37] N. N. Cholz et K. A. Piskarev, *Isz. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, série *Phys.*, t. 16, n° 6, 1952.

[38] Pascal.

[39] J. L. Snoek, *Physica*, t. III, n° 6, juin 1936, p. 463-483.

[40] R. S. Weisz, *Journal of American Ceramic Society*, vol. 40, n° 4, 1957, p. 139-142.

[41] E. J. Werwey, M. G. van Bruggen, *Z. Kristallographie*, t. 92, 1935, p. 136-138.

[42] N. A. Toropov et All., *Zur. Priklad Khim*, t. XXVI, n° 9, 1953, p. 982-990.

[43] T. A. Smolenski, *Isz. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, série *Phys.*, t. 16, n° 6, 1952, p. 728-747.

[44] E. Albers Schœnberg, *J. A. P.*, vol. 25, n° 2, février 1954, p. 152-154.

[45] E. Gelbard, *Tele-Techn.*, t. 11, mai 1952, p. 50.

[46] J. W. Forrester, *J. A. P.*, t. 22, 1951, p. 44.

[47] J. A. Rajchmann, *R. C. A. Rew.*, t. 13, 1952, p. 183.

[48] E. Albers Schœnberg, *Am. Rep. Comp. El. Ins.*, t. 51, 1952.

[49] D. R. Brown, E. Albers Schœnberg, *Electronics*, t. 26, 1953, p. 146.

[50] A. Vassiliev, *Onde électrique*, n° 340, juillet 1955, p. 672-681.

[51] G. Economos, *J. of Am. Cer. Soc.*, t. 38, 1955, p. 7 à 21.

[52] A. Eckert, *Vortag N. I. G. Tagung Darmstadt*, 25.10, 1955.

[53] E. Albers Schœnberg, *The Am. Cer. Soc. Bull.*, vol. 35, n° 7, juillet 1956.

[54] M. Kornetzki, *Frequenz*, Bd. 9, H. 3, 1955.

[55] E. Albers Schœnberg, *Ceramic Age*, mai 1952.

[56] M. Kornetzki, J. Brachmann et J. Frey, *Siemens Zeitsch.*, n° 10, septembre 1955.

[57] O. Eckert, *Convention on ferrites I. E. E.*, Londres, 29.20, 2 novembre 1956.

[58] F. Wagenknecht, *Frequenz*, Bd. 5, n° 6, juin 1951.

[59] R. S. Weisz, *Ceram. Industry*, avril 1952.

[60] H. Forestier et G. Guiot-Guillain, *C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 424.

[61] N. A. Toropov et Al Borisenko, *Zür. Prik. Khim*, XXIII, VII, 1950.

[62] C. Guillaud, Brevet français n° 1.093.965.

[63] C. Guillaud, Brevet français n° 963.988 1.093.965.

[64] Herbert Leenartz, *Funk und Ton*, n° 12, 1953.

[65] K. E. Latimer et H. B. Mac Donald, *Proceedings of I. E. E.*, vol. 97, IIe partie, n° 56, avril 1950.

[66] J. Arrazau, *L'onde électrique*, mars 1956, p. 252-267.

LES SERVOMÉCANISMES DANS LES CALCULATEURS ANALOGIQUES (¹)

PAR R. GENDREU,

Département « Calculateurs »
du Centre de Recherches Techniques de la Compagnie Générale de T. S. F.

DEUXIÈME PARTIE.

SOMMAIRE. — *Dans la première partie, l'auteur avait donné les notions nécessaires pour déterminer la contribution des servomécanismes à la précision du calcul.*
Dans cette deuxième partie, après un aperçu du domaine d'application du servomécanisme dans le calculateur haute fréquence C. S. F., il utilise ces résultats pour déterminer les performances obtenues dans les deux opérations analytiques : dérivation et intégration.
La première étude est faite en s'appuyant sur un problème de tir contre avion.
(C.D.U : 621-526 : 681-142).

SUMMARY. — *In part I, the author has set down the necessary elements for determining the contribution of servomechanisms to the accuracy of calculations.*
In part II, after sketching out the field of application of a servomechanism in the C. S. F. high-frequency computer, the author uses these results to determine the performance obtained in the two analytic operations : differentiation and integration.
For the first investigation an anti-aircraft gunnery problem is considered.
(U.D.C : 621-526 : 681-142).

1. DOMAINE D'APPLICATION DU SERVOMÉCANISME. DANS LES CALCULATEURS ANALOGIQUES.

1.1. Pour traiter les problèmes posés, le calculateur effectue un certain nombre d'opérations élémentaires parmi lesquelles on peut citer [1] :

— les opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication, division, élévation à une puissance, extraction d'une racine sur des fonctions mathématiques ou empiriques (expérimentales entre autres) d'une variable;

— opérations analytiques (dérivation, intégration, soit par rapport au temps, soit par rapport à une variable) de ces fonctions;

— génération de fonctions uniques ou multiples simultanées, monovariables ou polyvariables et de leurs dérivées;

— résolution d'équations ou systèmes d'équations implicites comportant les opérations précédentes;

— matérialisation ou transmission des résultats partiels ou finals du calcul.

1.2. L'originalité du calculateur [1] apparaît dans le procédé de calcul, utilisant des courants de haute fréquence et ainsi, par voie de conséquence, dans la précision avec laquelle ces calculs sont effectués.

Les variables entrant dans le calculateur ainsi que celles apparaissant comme résultats finals du calcul sont matérialisées en général par la position de l'arbre d'un condensateur; le module de la tension haute fréquence délivrée par ce dernier

---

(¹) Manuscrit reçu le 23 juillet 1957.

représente souvent un résultat de calcul intermédiaire.

Le rôle du servomécanisme se limite alors à

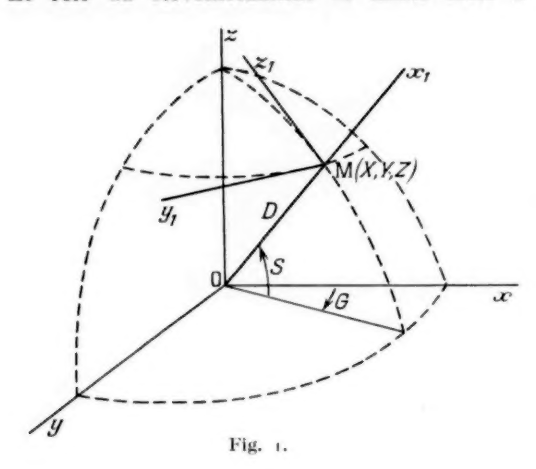


Fig. 1.

définir la position de l'arbre qu'il commande avec une précision compatible avec celle du procédé de calcul.

Dans la première partie de cet article il a été donné les notions nécessaires au calcul des erreurs introduites par le servomécanisme.

1.3. Pour préciser, on peut donner l'exemple classique du changement de coordonnées.

1.3.1. Soit donc à résoudre le système

(1) $X - D\cos S\cos G = X - X_s = 0,$

(2) $Y - D\cos S\sin G = Y - Y_s = 0,$

(3) $Z - D\sin S = Z - Z_s = 0.$

X, Y, Z sont les données (ou grandeurs d'entrées) et représentent par exemple (voir *fig.* 1) les coordonnées cartésiennes d'un point M rapportées au trièdre $O\,x\,y\,z$;

D, S, G sont les résultats du calcul (ou grandeurs de sortie) et représentent les coordonnées sphériques du même point.

1.3.2. La résolution du système peut être effectuée suivant le schéma (*fig.* 2) qui traduit les équations (1), (2), (3). Dans ce schéma, le détail des cellules n'est pas figuré [1].

La tension de référence haute fréquence est fournie par un générateur à impédance interne nulle.

La stabilité en fréquence nécessaire est celle fournie par un quartz classique. Elle doit être au minimum de 10^{-3}. Toutefois une stabilité de 10^{-4} assure une grande sécurité.

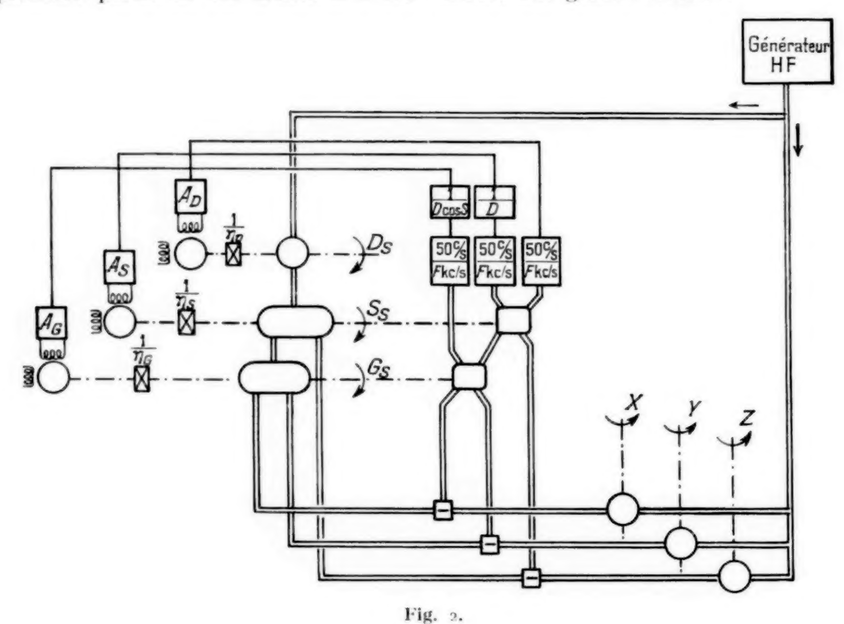


Fig. 2.

Les composantes X, Y, Z sont représentées en grandeur et signe par l'amplitude et la phase (0 ou π) de trois tensions haute fréquence délivrées par trois cellules de calcul équipées de condensateur à variation linéaire de capacité.

Un bloc de trois cellules en cascade comprenant successivement un condensateur linéaire à zéro décalé (distance polaire D) et deux condensateurs à variation sinusoïdale de capacité délivrent trois tensions représentant les grandeurs de sortie X_s, Y_s, Z_s. La précision de ces six condensateurs est très élevée [1].

Un transformateur de coordonnée opérant également en haute fréquence avec une précision moyenne donne à partir des écarts ΔX, ΔY, ΔZ rapportés à $Oxyz$, les écarts correspondants Δx_1, Δy_1, Δz_1 rapportés à $Ox_1y_1z_1$ (cf. *fig.* 1).

Après changement de fréquence porteuse des tensions d'erreurs correspondantes, les écarts linéaires Δy_1 et Δz_1 sont respectivement divisés par $D \cos S$ et D. Après amplification dans A_D, A_S, A_G, les écarts polaires ΔD, ΔS, ΔG commandent les moteurs d'asservissement.

1.3.3. ÉVALUATION DES PERFORMANCES. — En désignant par a le nombre de volts par unité de longueur délivré par le bloc de précision, les tensions correspondantes à X_s, Y_s, Z_s sont

$$e_{XS} = a D \cos S \cos G, \tag{4}$$
$$e_{YS} = a D \cos S \sin G, \tag{5}$$
$$e_{ZS} = a D \sin S. \tag{6}$$

Le transformateur de coordonnées d'erreur (ou répartiteur) résout le système suivant :

$$\Delta e_{x1} = (\Delta e_x \cos G + \Delta e_y \sin G) \cos S + \Delta e_z \sin S, \tag{7}$$
$$\Delta e_{y1} = \Delta e_y \cos G - \Delta e_x \sin G, \tag{8}$$
$$\Delta e_{z1} = -(\Delta e_x \cos G + \Delta e_y \sin G) \sin S + \Delta e_z \cos S. \tag{9}$$

1.3.3.1. *Calcul des raideurs.* — Les trois arbres étant supposés asservis sur un point fixe M, un faible écart ΔD sur l'arbre D donne à la sortie du répartiteur d'erreur une tension $(\Delta v_{x1})_D$. Cette tension est obtenue en portant dans (7) les valeurs Δv_x, Δv_y, Δv_z provenant de la différentiation par rapport à D des relations (4), (5) et (6). Opérant ainsi, il vient

$$\lambda_D = \frac{(\Delta e_{x1})_D}{\Delta D} = a \quad \text{V par unité de longueur.} \tag{10}$$

Opérant de même pour S et G, on obtient

$$\frac{(\Delta e_{z1})_S}{\Delta S} = a D \quad \text{V/rad,}$$
$$\frac{(\Delta e_{y1})_G}{\Delta G} = a D \cos S \quad \text{V/rad.}$$

Pour obtenir des raideurs constantes, il est nécessaire de multiplier ces deux rapports, respectivement par $\frac{D_0}{D}$ et $\frac{D_0}{D \cos S}$. Dans ces deux expressions, D_0 désigne la distance correspondant à un tour complet de l'arbre D (*cf.* [1]).

Ces deux opérations sont effectuées (voir *fig.* 2) par deux amplificateurs à gain variable. On obtient alors

$$\lambda_S = a D_0 \quad \text{V/rad,} \tag{11}$$
$$\lambda_G = a D_0 \quad \text{V/rad.} \tag{12}$$

En revenant aux définitions pratiques des raideurs données dans le précédent article [2], il vient

$$\lambda_D = a D_0 \quad \text{V/tour,} \tag{13}$$
$$\lambda_S = 2\pi . \lambda_D \quad \text{V/tour,} \tag{14}$$
$$\lambda_G = 2\pi . \lambda_D \quad \text{V/tour.} \tag{15}$$

Les opérations $\frac{1}{D \cos S}$ et $\frac{1}{D}$ effectuées dans les boucles G et S dans le but d'obtenir un retard dynamique Δt constant ne peuvent être réalisées que dans les intervalles

$$\begin{cases} (D \cos S)_m < D \cos S < D_M, \\ D_m < D < D_M; \end{cases} \tag{16}$$

D_M désigne la distance maximum explorée;

D_m désigne la distance minimum. Cette borne inférieure est naturellement imposée par les considérations physiques.

1.3.3.2. *Calcul des erreurs : Erreurs dues aux perturbations extérieures* [2]. — Nous supposerons que les trois boucles d'asservissement ont le même facteur de qualité F et que les trois arbres de sortie soient capables de tourner à la même vitesse maximum Ω_{SM}.

Dans ces conditions, les erreurs de positionnement de ces trois arbres seront

$$\varepsilon_D = \frac{\Omega_{SM}}{F} D_0 \quad \text{unité de longueur,} \tag{17}$$
$$\varepsilon_S = \frac{\Omega_{SM}}{F} 2\pi \quad \text{rad,} \tag{18}$$
$$\varepsilon_G = \frac{\Omega_{SM}}{F} 2\pi \quad \text{rad.} \tag{19}$$

Pour un observateur placé en O (voir *fig.* 1) et visant suivant Ox_1, les écarts linéaires constatés sont

$$\Delta y_1 = \varepsilon_G D \cos S, \tag{20}$$
$$\Delta z_1 = \varepsilon_S D. \tag{21}$$

Ces écarts de pointage sont proportionnels à la distance.

Erreurs dynamiques. — L'intérêt de conserver la

constance du retard dynamique dans les boucles S et G apparaît dans le fonctionnement dynamique du système.

Supposons le point M en mouvement dans un domaine limité par les surfaces définies à partir des relations (16). (La figure 3 représente un quart du domaine.)

A l'intérieur de ce domaine, le retard dynamique Δt des trois servomécanismes D_s, S_s, G_s, est constant.

Leur fonction de transfert globale est [2]

$$\frac{D_S}{D} = \frac{S_S}{S} = \frac{G_S}{G} = \frac{1}{1 + p\,\Delta t + p^2 \tau_m \Delta t}. \tag{22}$$

d'où

$$G_S(t) \neq G(t - \Delta t) \tag{24}$$

et deux relations analogues pour D et S.

Avec les approximations faites, le servomécanisme se comporte comme une ligne artificielle introduisant sur le mouvement du point M un retard constant Δt. Si $\vec{V}$ désigne le vecteur vitesse, la position du point visé M′ se trouve définie par la relation

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \vec{V}\,\Delta t. \tag{25}$$

Ce résultat est particulièrement intéressant pour

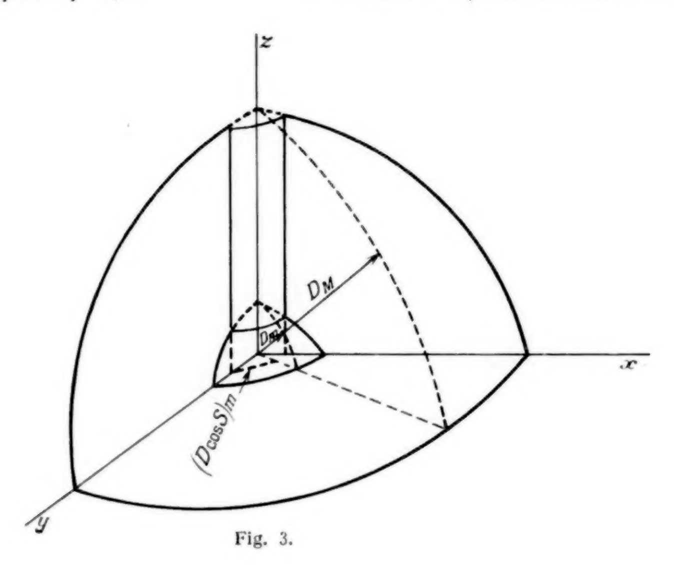


Fig. 3.

un dispositif de poursuite d'un but se déplaçant à vitesse constante. Dans ce cas, en effet, l'écart linéique $V\,\Delta t$ le long de sa trajectoire est constant.

Examinons la relation temporelle liant une coordonnée calculée G_s à la coordonnée théorique G.

D'après (22), on a

$$G(t) = G_s(t) + [G'_s(t) + G''_s(t)\,\tau_m]\,\Delta t. \tag{23}$$

Dans les calculateurs analogiques la constante de temps électromécanique des moteurs est toujours très faible : $\tau_m < 0{,}01$ s.

Il en résulte qu'il est souvent possible de négliger le terme accélération $G''_s \tau_m$ devant le terme vitesse G'_s.

De (23), on tire

$$G_S(t) = G(t) - G'_s(t)\,\Delta t.$$

En supposant que la fonction $G(t)$ et ses dérivées sont continues dans le domaine considéré, on a sensiblement

$$G_S(t) = G(t) - G'(t)\,\Delta t.$$

2. ÉTUDE D'UN RÉSEAU DE DÉRIVATION.

2.1. Généralités.

Dans les problèmes variés qu'est appelé à résoudre le calculateur analogique (*cf.* § 1.1), les données de calculs, les résultats intermédiaires ou finals présentent un caractère commun : la valeur réelle de ces grandeurs diffère de la valeur théorique donnée ou espérée d'un écart en général aléatoire.

Que l'opération de dérivation appliquée à une fonction soit effectuée par rapport au temps ou à toute autre variable, le spectre continu et très étendu de l'erreur se trouve modifié proportionnellement à

la fréquence. Cette remarque évidente pour la variable temps l'est encore lorsqu'on utilise des procédés courants pour résoudre l'opération de dérivation $\frac{dy}{dx}$ par rapport à une variable x autre que le temps en lui substituant une opération apparemment plus compliquée où le temps intervient suivant l'identité :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{26}$$

Il en résulte le plus souvent que les dérivées des grandeurs réelles présentent une erreur trop importante pour être utilisées dans la suite des calculs.

ou dispositif équivalent) qui donne à chaque instant les coordonnées polaires D, S, G du but (voir *fig.* 1);

— la batterie de canons recevant à chaque instant d'un calculateur les informations de tir : gisement J et inclinaison I;

— la position géographique du calculateur est sans importance.

Dans les grandes lignes, le calcul est effectué de la façon suivante :

Calcul cinématique. — Le calculateur reçoit du dispositif de détection les coordonnées sphériques actuelles D, S, G du but et élabore suivant le procédé haute fréquence connu ses coordonnées cartésiennes actuelles X_a, Y_a, Z_a.

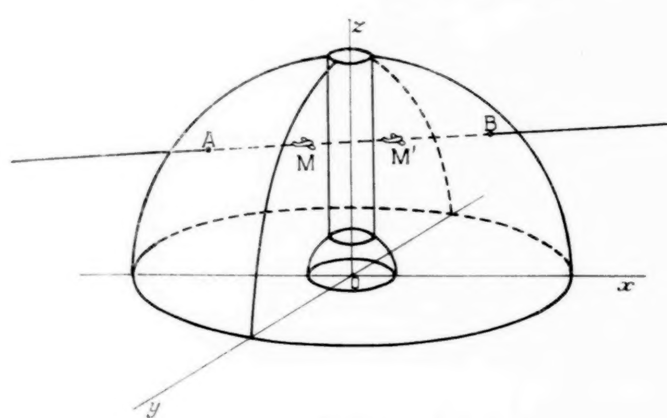


Fig. 4.

Il sera en général nécessaire de filtrer le résultat et, de ce fait, on introduira une erreur dynamique supplémentaire venant s'ajouter à l'erreur aléatoire.

La précision en régime établi et le temps de réponse détermineront une fonction de transfert optimum. Dans certains problèmes à solution continue il sera intéressant d'envisager une solution non linéaire pour diminuer le temps de réponse.

2.2. Application au problème de tir contre avion.

2.2.1. Ce problème particulier permet de préciser les notions exposées au paragraphe précédent. La figure 4 image les conditions d'exploitation d'un ensemble de tir. Pour simplifier, on a supposé concentrés à l'origine O des coordonnées :

— le système détecteur de but (radar, optique

Par un procédé décrit ultérieurement, il calcule les vitesses correspondantes $\frac{dX_a}{dt}$, $\frac{dY_a}{dt}$, $\frac{dZ_a}{dt}$. Si l'on suppose que ce but se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme, ces trois vitesses sont constantes.

A partir des coordonnées actuelles du but M, des vitesses précédemment calculées et de la durée de trajet T pour l'instant arbitraire, le calculateur définit une position future fictive du but M' rapportée au trièdre $Oxyz$. Cette position est définie par les trois relations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} X_f &= X_a + T\frac{dX_a}{dt}, \\ Y_f &= Y_a + T\frac{dY_a}{dt}, \\ Z_f &= Z_a + T\frac{dZ_a}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Calcul balistique. — A l'aide des fonctions balis-

tiques afférentes au type de canon utilisé, de la durée de trajet T et des angles de tir I et J (ces trois coordonnées étant pour l'instant arbitraire), le calculateur élabore dans un système approprié (S) les coordonnées cartésiennes du projectile B. Soit X_b, Y_b, Z_b.

Le problème est résolu lorsque le point futur M′ coïncide avec le point balistique B

$$\overrightarrow{M'B} = 0. \tag{28}$$

X_{fs}, Y_{fs}, Z_{fs} désignant les coordonnées de M′ rapportées au système S, la relation (28) se traduit par les trois relations suivantes :

$$\begin{cases} X_b - X_{fs} = 0, \\ Y_b - Y_{fs} = 0, \\ Z_b - Z_{fs} = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Le système (29) est résolu de façon continue par trois servomécanismes maintenant les trois coordonnées I, J, T aux valeurs correctes.

2.2.2. Les caractéristiques d'un réseau de dérivation ne peuvent être déterminées qu'en considérant le rôle qu'il joue dans le calcul cinématique.

Il paraît utile de préciser quelques ordres de grandeurs (voir *fig.* 4).

2.2.2.1. D_u peut être de l'ordre de 10 à 20 km; D_m et $(D \cos S)_m$ sont inférieurs à 0,5 km.

Considérons le trajet rectiligne AB = 20 km parcouru à une vitesse de 400 m/s. La durée de ce trajet est de 50 s. D'autre part, si l'on désigne par N le milieu de AB, point le plus rapproché de l'origine O, l'efficacité du tir sera élevée le long de AN (avion vient) et faible le long de NB (avion s'en va).

Il en résulte que tactiquement le temps théoriquement utile est limité à 25 s. Les temps de manœuvre divers pour assurer le fonctionnement de l'ensemble de tir réduisent encore ce temps théorique. Dans l'ordre chronologique ces opérations se déroulent de la façon suivante :

Instant $t = 0$: Le détecteur de but acquiert l'avion et transmet ses informations au calculateur. A la fin de cette opération (durée inférieure à 5 s), le calculateur a enregistré la position du but actuel et se trouve prêt pour calculer sa vitesse.

Instant $t = 5$ s : Le calculateur élabore les trois composantes de la vitesse du but et dans le même temps sa position future d'après (27). La durée de cette phase peut être inférieure à 3 s. A la fin de cette opération les relations (29) sont également résolues et les canons reçoivent les angles de tir, I et J corrects et peuvent tirer.

Instant $t = 8$ s : La figure 5 représente à cet instant dans le plan AOB la position actuelle M (8) du but et sa position future M (8 + T). T désigne la durée de trajet du projectile à l'instant $t = 8$ s. Supposons $T(8) = 7$ s. Il en résulte que la période de tir efficace est de l'ordre de

$$25 - (8 + T) = 10 \text{ s}.$$

Avec une cadence de tir de 240 coups/mn, un seul canon tirerait 40 obus répartis à raison d'un projectile tous les 100 m le long de la trajectoire du but. Pour accroître l'efficacité du tir on augmente le nombre de pièces et l'on peut évidemment aussi chercher à augmenter la période de tir, ce qui conduit à réduire les temps de manœuvre. La durée

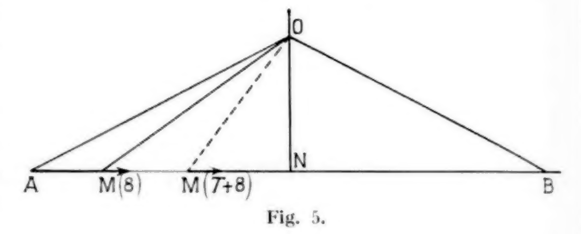


Fig. 5.

de la première période (acquisition de la position du but) est déterminée d'une façon assez précise, car elle résulte de l'exécution d'une suite d'opérations dont la durée est connue par construction.

La durée de la deuxième période (calcul de la vitesse) est moins bien connue et à cause du bruit accompagnant les informations radar (détecteur de but classique), il n'est généralement pas possible de déterminer le temps au bout duquel cette dérivée sera calculée avec une précision donnée.

2.2.2.2. On peut avoir un aperçu de ces difficultés en considérant l'exemple précédent :

Un avion se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse V_a (*fig.* 4).

Un radar donne à chaque instant ses coordonnées sphériques D_r, S_r, G_r, avec un retard dynamique Δt_r constant par rapport aux coordonnées réelles du but D_a, S_a, G_a.

Les informations D_r, S_r, G_r sont affectées d'une erreur supplémentaire aléatoire due au procédé de détection ΔD, ΔS, ΔG.

Le calculateur recopie ces trois coordonnées avec son retard dynamique propre Δt_c.

La bande passante des servomécanismes du calculateur étant élevée, les éléments positions D_c, S_c, G_c

du calculateur se trouvent entachés des mêmes écarts ΔD, ΔS, ΔG.

Le retard dynamique étant indépendant du système de référence, on examine le problème suivant l'axe Ox.

Le but futur est élaboré suivant le schéma synoptique (*fig.* 6).

Dans les notations suivantes, les fonctions du temps ou leur transformée sont représentées par le même symbole. Suivant l'axe Ox, on pose :

X_a, position actuelle du but;
V_a, vitesse du but;
T, durée d'extrapolation;
X_{af}, position future du but;

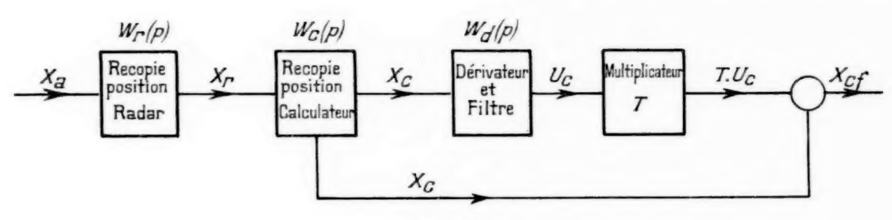


Fig. 6.

X_r, position du but élaborée par le radar;
ΔX, écart aléatoire introduit sur X_r par le dispositif de détection;
X_c, position du but élaborée par le calculateur;
U_c, vitesse calculée;
X_{cf}, position future du but calculée;
$W_r(p)$, fonction de transfert globale des servomécanismes radar;
$W_c(p)$, fonction de transfert globale des servomécanismes calculateur;
$W_d(p) = pF(p)$, fonction de transfert globale du réseau de dérivation;
$F(p)$, fonction de transfert du filtre.

Avec $X_a(0) = 0$, on a à l'instant t :

— Position actuelle du but :

$$X_a = V_a t; \tag{30}$$

— Position future du but :

$$X_{af} = V_a(t + T); \tag{31}$$

— L'acquisition du but étant supposée réalisée, on a à l'entrée du calculateur

$$X_r = V_a(t - \Delta t_r) + \Delta X; \tag{32}$$

— La vitesse du but étant supposée calculée, la position future élaborée par le calculateur est

$$X_{cf} = V_a(t + T - \Delta t) + \Delta X + T\,\frac{\mathrm{d}(\Delta X)}{\mathrm{d}t}, \tag{33}$$

avec

$$\Delta t = \Delta t_r + \Delta t_c. \tag{34}$$

L'erreur sur la position future du but est

$$\varepsilon = X_{af} - X_{cf} = V_a\,\Delta t - \Delta X - T\,\frac{\mathrm{d}(\Delta X)}{\mathrm{d}t}. \tag{35}$$

L'importance relative des trois erreurs est précisée par l'exemple suivant :

$$V_a = 300\ \mathrm{m/s}, \qquad T = 5\ \mathrm{s}, \qquad \Delta t = 10^{-2}\ \mathrm{s}.$$

D'autre part, pour tenir compte du bruit, on substitue à l'écart aléatoire ΔX une perturbation sinusoïdale

$$\Delta X = \Delta X_M \sin \omega t, \tag{36}$$

avec

$$\Delta X_M = 5\ \mathrm{m}, \qquad \omega = 6{,}28\ \mathrm{rad/s}.$$

On a ainsi

$$V_a\,\Delta t = 3\ \mathrm{m}, \qquad |\Delta X| = 5\ \mathrm{m}.$$

Il est important de signaler que si Δt est vraiment un invariant, il est possible [éq. (33)] d'éliminer l'erreur dynamique $V_a\,\Delta t$ en faussant l'échelle du multiplicateur par T pour y introduire $(T + \Delta t)$ (voir *fig.* 6).

Pour calculer $\frac{\mathrm{d}(\Delta X)}{\mathrm{d}t}$, nous allons examiner les trois hypothèses suivantes :

1° *Réseau dérivateur parfait* $F(p) = 1$. — Dans ce cas, la vitesse U_c est calculée sans retard

$$U_c = V_a + \Delta X_M\,\omega \cos \omega t. \tag{37}$$

Sa valeur est affectée d'une erreur sinusoïdale d'amplitude

$$\Delta X_M\,\omega = 31{,}4\ \mathrm{m/s}.$$

L'erreur qui en résulte sur le point futur est

$$T\frac{\mathrm{d}(\Delta Y)}{\mathrm{d}t} = 157\ \mathrm{m}.$$

Ce résultat est évidemment inexploitable.

2° *Réseau dérivateur avec filtre* :

(38) $$F(p) = \frac{1}{1+p\tau}.$$

— Dans les calculs suivants, pour alléger l'exposé on supposera compensé le retard dynamique global Δt.

Avec cette condition, on a

(39) $$X_c = X_r = (V_a t + \Delta Y_M \mathfrak{I}\, e^{j\omega t})\,\mathcal{U}(t) \quad (^2)$$

ou encore

(40) $$X_c = X_r = \frac{V_a}{p^2} + \Delta Y_M \mathfrak{I}\, \frac{1}{p-j\omega}.$$

La vitesse est donnée par

(41) $$U_c = W_d X_c = \frac{V_a}{p(1+p\tau)} + \Delta Y_M \mathfrak{I}\, \frac{p}{(p-j\omega)(1+p\tau)}.$$

En repassant à l'original et en séparant les réponses correspondant aux régimes permanent et transitoire, on a

(42) $$U_c = V_a + \frac{\Delta Y_M \omega}{(1+\omega^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}}\sin(\omega t + \varphi) - e^{-\frac{t}{\tau}}\left(V_a + \frac{\Delta Y_M \omega}{1+\omega^2\tau^2}\right)$$

avec

(43) $$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{\omega\tau}.$$

D'autre part, on pose

(44) $$\varepsilon_1(t) = \frac{\Delta Y_M \omega}{(1+\omega^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}}\sin(\omega t + \varphi),$$

(45) $$\varepsilon_2(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(V_a + \frac{\Delta Y_M \omega}{1+\omega^2\tau^2}\right).$$

Régime permanent : Il est atteint lorsque

$$\varepsilon_2 = 0, \qquad U_c(t \nearrow \infty) = V_a + \varepsilon_1.$$

En régime établi, l'erreur sur le point futur est

(46) $$\varepsilon = X_{af} - X_{cf} = -(\Delta X + T\varepsilon_1).$$

Pour avoir une erreur ε acceptable, on fera

$$|T\varepsilon_1| \leqq |\Delta X|,$$

(²) $\mathfrak{I}$, partie imaginaire de...; $\mathcal{U}(t)$, fonction unité.

d'où, d'après (36) et (44),

(47) $$\frac{\omega T}{(1+\omega^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}} \leqq 1.$$

Cette relation prend une forme simple pour les composantes affaiblies par le filtre pour lesquelles

(48) $$\omega\tau \gg 1.$$

Dans ce cas, on a

(47′) $$\tau \geqq T.$$

En reprenant l'exemple précédent, on constate qu'en prenant $\tau = T = 5$ s on a sur le point futur une erreur périodique de 10 m, soit le double de celle qu'on a sur le point actuel.

Temps de réponse : Cette définition est arbitraire. On peut rechercher le temps t_r au bout duquel la vitesse moyenne U_c est calculée avec une précision donnée $\frac{V_a}{K}$.

D'après (45), la condition s'écrit

(49) $$\varepsilon_2(t_r) \leqq \frac{V_a}{K}.$$

Après simplification, on a

$$e^{\frac{t_r}{\tau}} \geqq K.$$

Avec les données précédentes, $\tau = 5$ s et $K = 100$,

(50) $$t_r \geqq 4{,}6 \times 5 = 23\ \mathrm{s}.$$

A cet instant, le point futur est affecté d'une erreur dynamique supplémentaire de

$$\frac{300}{100} \times 5 = 15\ \mathrm{m}.$$

Cette solution est également inacceptable, le temps de réponse étant trop élevé.

3° *Réseau dérivateur avec filtre* :

$$F(p) = \frac{1}{(1+p\tau)^2}.$$

— En reprenant les conditions initiales du calcul précédent et avec l'hypothèse (48), on trouve pour expression de la vitesse calculée

(51) $$U_c \# V_a + \frac{\Delta Y_M}{\omega\tau^2}\sin(\omega t + \varphi) - e^{-\frac{t}{\tau}}\left[V_a - \frac{\Delta Y_M}{\omega\tau^2} + \frac{t}{\tau}\left(V_a + \frac{\Delta X_M}{\omega\tau^2}\right)\right],$$

où l'on pose

$$(52)\qquad \varepsilon_1(t) = \frac{\Delta V_M}{\omega\tau^2}\sin(\omega t + \varphi),$$

$$(53)\qquad \varepsilon_2(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left[V_a - \frac{\Delta V_M}{\omega\tau^2} + \frac{t}{\tau}\left(V_a + \frac{\Delta V_M}{\omega\tau^2}\right)\right].$$

Régime permanent : Il est atteint lorsque

$$\varepsilon_2 = 0, \qquad U_c(t + \tau x) = V_a + \varepsilon_1.$$

En régime établi, l'erreur ε sur le point futur est donnée par (46). Pour avoir une erreur acceptable, on fera

$$|T\varepsilon_1| \leq |\Delta V|,$$

d'où, d'après (36) et (52),

$$\frac{T}{\omega\tau^2} \leq 1,$$

soit

$$(54)\qquad \tau \geq \left(\frac{T}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En reprenant les données de l'exemple précédent $T = 5$ s, $\omega = 6{,}28$ rad/s, la relation (54) donne $\tau = 0{,}9$ s. Avec cette valeur, on obtient sur le point futur une erreur périodique de 10 m.

Temps de réponse : De (49) et de la relation (53) simplifiée on déduit

$$\mathrm{e}^{-\frac{t_r}{\tau}} V_a\left(1 + \frac{t_r}{\tau}\right) \leq \frac{V_a}{K},$$

soit

$$(55)\qquad \mathrm{e}^{\frac{t_r}{\tau}} \geq K\left(1 + \frac{t_r}{\tau}\right),$$

avec $K = 100$ la relation est vérifiée pour

$$\frac{t_r}{\tau} = 6{,}65, \qquad \text{d'où} \qquad t_r \leq 6\,\text{s}.$$

En utilisant ce réseau on réduit notablement le temps de réponse, mais au bout de 6 s nous avons encore sur le point futur une erreur dynamique de 15 m. Cette erreur se trouve réduite à 2 m au bout de 10 s.

Si l'on désire diminuer encore le temps de réponse, il faut rechercher une solution non linéaire adaptée au problème particulier, la nature du spectre des informations en faisant toujours un cas d'espèce.

Le calcul de vitesse peut, par exemple, s'effectuer suivant l'équation ci-dessous :

$$(56)\qquad U_c + \tau\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}X_c}{\mathrm{d}t},$$

où τ est une fonction du temps.

Comme on le verra ultérieurement, le servomécanisme de dérivation, par construction, ne peut fournir sur l'arbre asservi U_c qu'une accélération maximum γ_M.

La relation

$$(57)\qquad \left(\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} \leq \gamma_M$$

fixe la valeur initiale de τ. $\tau(t)$ sera déterminé pour satisfaire les désirs de l'utilisateur. Elle peut être une fonction continue du temps ou une fonction à créneaux. Quelques précisions sur la réalisation de ces fonctions seront données dans le paragraphe suivant.

2.2.3. Réalisation d'un réseau de dérivation. — 2.2.3.1. Le schéma de la figure 7 donne un exemple de réseau dérivateur utilisant un servomécanisme. Les éléments positions d'entrée X, Y, Z sont représentés par trois tensions haute fréquence délivrées par un bloc de cellule D, S, G identique à celui représenté figure 2.

Le réseau dérivateur est figuré seulement pour la coordonnée X. L'opération étant effectuée en courant continu, la grandeur d'entrée et sa dérivée représentées par des tensions haute fréquence sont démodulées linéairement avec une grande précision par des démodulateurs à impédance interne négligeable.

Les éléments principaux du réseau de dérivation sont la capacité C_1 et la résistance R_2. La précision et la stabilité de ces deux éléments sont fixées par la précision de calcul désirée. R_1 et C_2 sont des éléments complémentaires contribuant à la détermination de la fonction de transfert du filtre. Ces deux éléments n'ont pas d'influence sur la précision du calcul si C_2 est une capacité à faibles pertes.

2.2.3.2. Le long de la boucle d'asservissement on trouve :

— un réseau correcteur de fonction de transfert β_3;

— un séparateur S d'admittance d'entrée réelle a_3 et d'admittance de sortie nulle (facteur d'affaiblissement S);

— un modulateur d'erreur V;

— un amplificateur d'amplification en tension A (réponse isomorphe);

— un moteur diphasé de fonction de transfert

$$(58)\qquad M = \frac{k}{p(1 + p\tau_m)};$$

— un train d'engrenage réducteur de rapport n;

— un condensateur variable linéaire délivrant une tension haute fréquence d'amplitude proportionnelle à la vitesse à calculer (*fig.* 8).

On désigne par :

— $U_M < U_c < U_M$ la gamme de vitesse. Les limites de l'intervalle correspondent à la tension maximum délivrable par la cellule; $U_0 = 4\,U_M$ correspond à un tour complet de l'arbre de sortie;

Aux notations précédentes, il convient d'ajouter les suivantes :

v_e, tension délivrée par le démodulateur

$$v_e = a\,X, \tag{60}$$

avec

a, en volt par unité de longueur;

v_0, tension d'erreur;

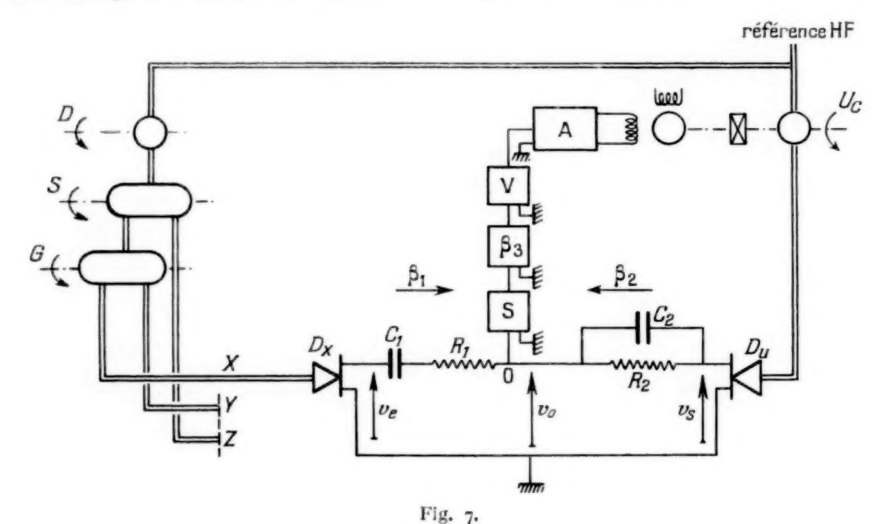


Fig. 7.

b, raideur réduite de la cellule de calcul U_c en volt par unité de vitesse

$$\lambda = b\,U_0, \tag{59}$$

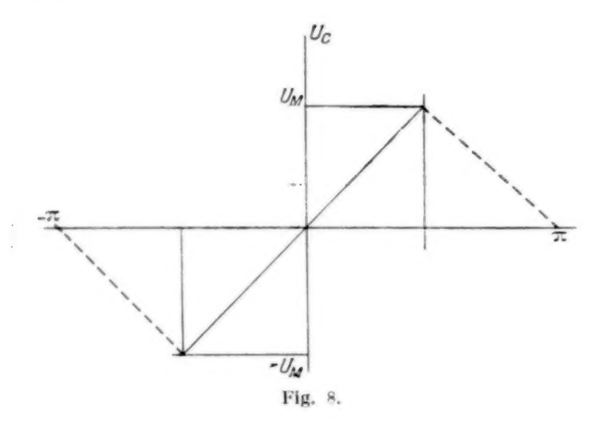


Fig. 8.

raideur de l'arbre U_c en volt par tour (λ et b sont mesurés à la sortie du démodulateur D_U).

v_s, tension délivrée par le démodulateur

$$v_s = b\,U_c; \tag{61}$$

β_1, fonction de transfert définie par le rapport

$$\beta_1 = \left(\frac{v_0}{v_e}\right)_{v_s = 0};$$

β_2, fonction de transfert définie par le rapport

$$\beta_2 = \left(\frac{v_0}{v_s}\right)_{v_e = 0};$$

β_{02}, valeur de β_2 pour $p = 0$;

β_{03}, valeur de β_3 pour $p = 0$;

$$\mu = \frac{1}{\Delta t} = \frac{\lambda \beta_{02} S \beta_{03} A k}{n}, \tag{62}$$

constante de transfert de la boucle en radians par seconde;

$$T = \frac{\beta_2 \beta_3}{\beta_{02} \beta_{03}} \, \frac{\mu}{p(1 + p\tau_m)}, \tag{63}$$

fonction de transfert de la boucle ouverte.

On pose, d'autre part,

$$a_1 = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{pC_1}}, \tag{64}$$

$$a_2 = \frac{1}{R_2} + pC_2. \tag{65}$$

2.2.3.3. *Fonction de transfert globale* W_d. — Compte tenu des notations précédentes et de la figure 7, on a

$$(\beta_1 v_e - \beta_2 v_s)\, T = \beta_2 v_s,$$

d'où

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{\beta_1}{\beta_2}\,\frac{T}{1+T}. \tag{66}$$

Explicitons $\frac{\beta_1}{\beta_2}$.

Un résultat classique donne

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{a_1}{a_2},$$

d'où, d'après (64) et (65),

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{pC_1R_2}{(1+pC_1R_1)(1+pC_2R_2)},$$

soit, en posant

$$\begin{cases} \tau_1 = C_1R_1, \\ \tau_2 = C_2R_2, \\ \tau = C_1R_2, \end{cases} \tag{67}$$

on obtient

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{p\tau}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}. \tag{68}$$

D'autre part, si l'on réalise la relation suivante :

$$\beta_2\beta_3 = \beta_{02}\beta_{03}, \tag{69}$$

la fonction de transfert de la boucle T devient, d'après (63) et (68),

$$T = \frac{\mu}{p(1+p\tau_m)}. \tag{70}$$

On retrouve pour T la fonction de transfert d'un asservissement en position déjà donnée.

Sa pulsation de coupure est élevée : $\omega_c \geq 100$ rad/s. Le filtrage de la vitesse exige, par contre, pour $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ des pulsations de coupure $\omega_{cU} \sim 1$ rad/s. Il résulte de ceci qu'il est possible de simplifier l'expression du transfert global : $\frac{T}{1+T}$.

On a ainsi

$$\frac{T}{1+T} \# \frac{1}{1+p\,\Delta t};$$

(66) devient

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{p\tau}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)(1+p\,\Delta t)},$$

d'où, d'après (60) et (61), et en supposant réalisée la relation

$$b = a\tau, \tag{71}$$

$$W_d = \frac{U_c}{X} = \frac{p}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)(1+p\,\Delta t)}. \tag{72}$$

La relation (71) sera réalisée par construction et réglée au mieux aux essais par variation d'une résistance d'appoint ρ en série avec R_2.

Les constantes τ_1 et τ_2 sont de l'ordre d'une seconde. Le retard dynamique Δt de l'ordre de 10^{-2} s. La relation (68) devient

$$W_d = \frac{p}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}. \tag{72'}$$

2.2.3.4. *Étude des réponses. — Réponse à un échelon vitesse* :

$$X = \frac{V_a}{p^2}. \tag{73}$$

On considère deux cas :

1° $\tau_2 = 0$: D'après (72′) et (73), on a

$$U_c = W_d X = \frac{V_a}{p(1+p\tau_1)}.$$

En prenant comme variables réduites

$$x = \frac{t}{\tau_1}, \qquad y = \frac{U_c(t)}{V_a},$$

on obtient la réponse

$$y = 1 - e^{-x} \tag{74}$$

représentée figure 9 *a*.

L'accélération initiale est

$$\gamma_0 = \frac{V_a}{\tau_1}. \tag{75}$$

2° $\tau_1 = \tau_2$: Avec les mêmes notations, on a

$$U_c = \frac{V_a}{p(1+p\tau_1)^2},$$

d'où la réponse

$$\begin{cases} y = 1-(1+x)\,e^{-x}, \\ y' = x\,e^{-x}, \\ y'' = (1-x)\,e^{-x}. \end{cases} \tag{76}$$

Cette réponse est représentée figure 9 *b*.

Réponse à un échelon position :

$$X = \frac{\Delta X}{p}. \tag{77}$$

Cet échelon simule un écart aléatoire sur l'information position X. On va comparer la réponse des deux réseaux dérivateurs précédents.

1° $\tau_2 = 0$: D'après (72′) et (77), on a

$$U_c = \frac{\Delta X}{1 + p\tau_1}.$$

En posant

$$x = \frac{t}{\tau_1}, \qquad y = \tau_1 \frac{U_c}{\Delta X},$$

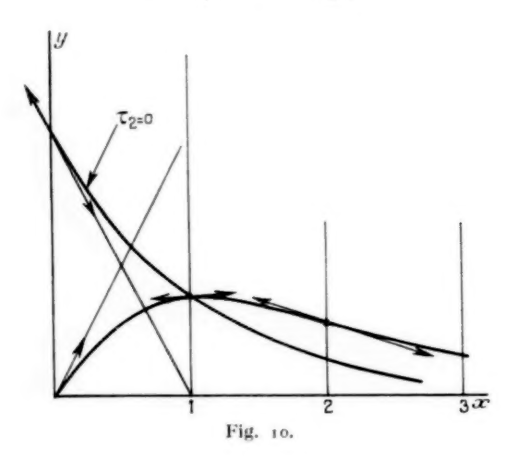


Fig. 10.

on obtient la réponse

$$y = e^{-x}, \qquad y_{max} = 1. \tag{78}$$

La réponse est représentée sur la figure 10.

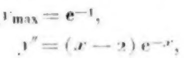
3° $\tau_2 = \tau_1$: Dans ce cas, on a

$$U_c = \frac{\Delta X}{(1 + p\tau_1)^2},$$

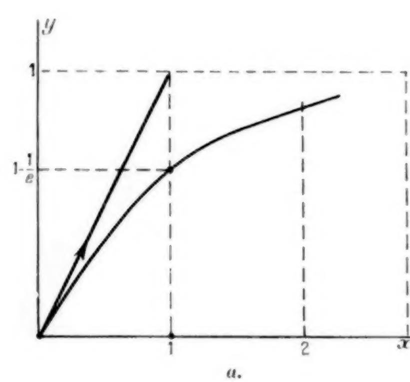
d'où la réponse réduite

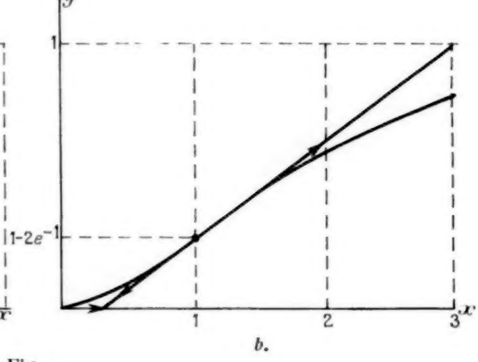
$$y = x e^{-x}, \tag{79}$$

avec



$$y' = e^{-x}(1 - x),$$
$$y_{max} = e^{-1},$$
$$y'' = (x - 2) e^{-x},$$





a. *b.*

Fig. 9.

Cette réponse est représentée sur la figure 10. En comparant les deux réponses, on notera le gain obtenu sur le filtrage de la dérivée de l'écart aléatoire lorsqu'on utilise le deuxième réseau. Toutefois on a vu que cette solution dans le problème particulier étudié (*cf.* 2.2.2.2) n'est pas acceptable, le temps d'acquisition de la vitesse étant encore trop long. Dans le paragraphe suivant on donne qualitativement une solution possible permettant de diminuer le temps de réponse tout en assurant en régime établi un filtrage suffisant de l'information vitesse.

2.2.3.5. La figure 11 représente le schéma exploitable d'un réseau de dérivation. Seule la partie active du réseau est représentée :

R_1 est une résistance fixe;

C_1 est déterminé par la relation d'échelle (71).

La deuxième constante de temps τ_2 est une fonction créneaux du temps réalisée par commutations successives à des époques prédéterminées de condensateur de capacité croissante. Les capacités non utilisées sont toujours chargées à la valeur instan-

tanée v_s. La tension v_0 étant très voisine de zéro leur commutation ne produit aucune discontinuité de la fonction $U_c(t)$.

L'acquisition de la dérivée s'effectue alors de la façon suivante :

Époque antérieure à l'origine des temps : Un relais r_1 maintient au potentiel zéro le point O. Cette précaution permet aux éléments positions X, Y, Z de prendre très rapidement leurs valeurs correctes sans perturber le réseau de dérivation (acquisition position).

$t = 0$, *condition initiale* $C_2 = 0$, *donc* $\tau_2 = 0$: Le relais r_1 libère le point O. La vitesse se calcule

saturé à l'instant initial, il est nécessaire de vérifier, d'après (75) et (80), la relation suivante :

$$\frac{V_a}{\tau_1} \leqq \gamma_M. \tag{81}$$

La vitesse maximum mesurable U_M et la relation (81) fixent la valeur minimum de τ_1

$$\tau_1 \geqq \frac{U_M}{\gamma_M}, \tag{82}$$

d'où, compte tenu de la relation (80) et de la relation $U_0 = 4\, U_M$,

$$\tau_1 \geqq \frac{1}{4\,\Omega_{SM}}. \tag{82'}$$

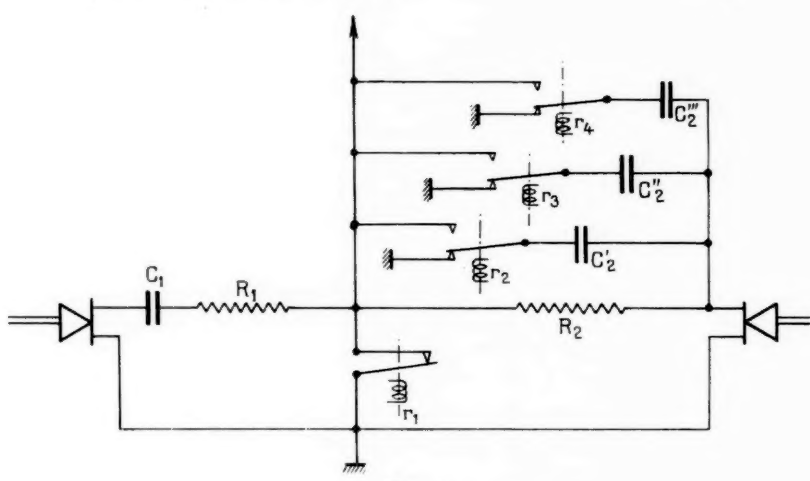


Fig. 11.

suivant la fonction de transfert simplifiée (72′) où l'on a fait : $\tau_2 = 0$.

Puis successivement, à des époques prédéterminées t_1, t_2, ..., on commute des capacités c_2', c_2'', ... La vitesse s'acquiert suivant la fonction de transfert (72′) dans laquelle τ_2 est une fonction croissante du temps. Suivant ce procédé, un nombre réduit de commutation suffit pour obtenir un temps d'acquisition acceptable avec une fonction de transfert finale satisfaisante pour réduire l'erreur aléatoire.

Il est important de noter qu'il existe une valeur minimum de τ_1 en dessous de laquelle on n'obtiendra aucune réduction du temps de réponse. En effet, le servomécanisme fonctionnant à saturation, il entraîne l'arbre de sortie à une vitesse maximum Ω_{SM} à laquelle correspond une accélération

$$\gamma_M = U_0\,\Omega_{SM}. \tag{80}$$

Si l'on désire que le servomécanisme ne soit pas

2.2.3.6. *Erreurs dues aux perturbations extérieures.* — 2.2.3.6.1. On a donné au paragraphe 2.10 [2] un aperçu sur la nature de ces perturbations et le moyen de calculer les erreurs qui en résultent sur le positionnement de l'arbre de sortie.

Le calcul de ces erreurs a été précisé dans le cas d'un asservissement en position.

Dans le fonctionnement du réseau de dérivation on a vu que, moyennant la réalisation de la condition (69), la fonction de transfert de la boucle (70) devenait identique à celle d'un asservissement en position. Il en résulte que les résultats du paragraphe 2.10 [2] sont directement applicables à toute perturbation s'introduisant en un point de la boucle du servomécanisme. L'erreur globale qui en résulte mesurée sur l'arbre moteur est donnée par la relation (59) (§ 2.10.2 [2])

$$\varepsilon_{mM} = \Omega_{mp}.\Delta t \quad [2]. \tag{59}$$

Dans cette relation, Ω_{mp}, somme des vitesses parasites dues aux différentes causes ne peut être déterminée que si l'on connaît le long de la boucle d'asservissement l'intensité de ces perturbations et les fonctions de transfert $T_0 n$, c'est-à-dire pour préciser les différents paramètres explicitant le retard dynamique Δt, relation (62).

Ces divers paramètres sont connus par construction ou imposés par les conditions de fonctionnement du réseau. En effet :

1° Δt sera choisie (*cf.* § 2.11.1 [2]);

2° k et Ω_u sont des données du moteur utilisé;

3° λ est imposé par construction [*cf.* éq. (59)];

4° $n = \frac{\Omega_u}{\Omega_{su}}$; τ_1 étant choisi, la relation (82') détermine Ω_{su} et, par suite, n est connu;

5° Tous ces paramètres étant ainsi connus, le produit $\beta_{02}\,\beta_{03}\,SA$ se trouve déterminé.

L'erreur évaluée directement en unité vitesse est alors, d'après (59),

$$\varepsilon_U = \frac{\varepsilon_{mu} U_0}{n}. \quad (83)$$

A cette erreur vient s'ajouter celle due à l'écart aléatoire ΔX accompagnant l'information d'entrée X. Le spectre de l'erreur sera déterminé à partir du spectre de ΔX et de la fonction de transfert (72').

2.2.3.6.2. *Application.* — Considérons un réseau de dérivation aux caractéristiques suivantes :

$U_u = 500$ m/s, soit $U_0 = 2.10^3$ m/s;

$a = 5$ V/km;

$b = 200$ V/km/s;

$\tau_1 = 0{,}5$ s,

utilisant un moteur C. S. F. 50 c/s pour lequel :

$k = 0{,}1$ t/s/V;

$\Omega_u = 25$ t/s;

$\Delta t = 10^{-2}$ s (retard dynamique optimum).

De (59), on déduit

$$\lambda = 400\,\text{V/t}.$$

De (82'), on tire

$$\Omega_{su} = 0{,}5\,\text{t/s},$$

d'où $n = 50$.

Le produit $\beta_{02}\,S\,\beta_{03}\,A$ est alors déterminé à partir de (62)

$$\beta_{02} S \beta_{03} A = \frac{n}{\Delta t . k . \lambda} = 125.$$

Les affaiblissements successifs β_{02}, S, β_{03} déterminent ensuite A.

Connaissant la répartition des transferts le long de la boucle, on est en mesure de déterminer les vitesses parasites Ω_{mp}.

Une valeur possible de Ω_{mp} est, par exemple, $\Omega_{mp} = 1$ t/s.

La relation (59) donne alors $\varepsilon_{mu} = 10^{-2}$ tour moteur et la relation (83) l'erreur sur la grandeur mesurée

$$\varepsilon_U = 0{,}4\,\text{m/s}.$$

3. ÉTUDE D'UN RÉSEAU INTÉGRATEUR.

3.1. **Généralités.**

Le calcul analogique permet en principe de résoudre tous les problèmes d'analyse qui se posent à l'ingénieur ou au physicien. Cependant, dans la réalisation des calculateurs, des difficultés apparaissent toutes les fois qu'on se propose de résoudre des équations ou des systèmes d'équations différentielles; le bruit de fond des appareils utilisés ou des informations d'entrée se trouve amplifié par les opérations de dérivation.

Pour éviter ces inconvénients, on effectue un changement de variables afin de transformer l'équation ou le système d'équations différentielles en une équation ou système d'équations intégrales. Il en résulte que l'intégrateur constitue la cellule de base des calculateurs analogiques utilisés spécialement pour les problèmes analytiques.

Dans ce qui suit, nous donnons un aperçu des performances réalisées par un intégrateur à servomécanismes utilisant le principe du calcul haute fréquence.

3.2. **Réalisation d'un réseau intégrateur.**

3.2.1. La figure 12 représente le schéma d'un réseau intégrateur à servomécanismes. On retrouvera dans ce schéma des éléments déjà utilisés dans un réseau dérivateur (*cf.* § 2.2.3.1). Pour préciser par la suite les performances de l'intégrateur nous avons choisi un exemple particulier : le dispositif étudié simule le mouvement d'un mobile sur un axe de coordonnée.

3.2.2. Notations utilisées. — Les fonctions du temps et leur transformées sont représentées par le même symbole.

Notations relatives à la grandeur d'entrée :

U, vitesse du mobile;

U_M, vitesse maximum, $-U_M \leq U \leq U_M$ (*fig.* 8);

b, raideur réduite en volt par unité de vitesse;

(84) $$v_e = bU,$$

tension d'entrée (démodulateur D_U);

Δv_e, tension résiduelle du démodulateur linéaire;

ΔU, erreur vitesse correspondante à

(85) $$\Delta v_e = b\Delta U.$$

A, gain électronique;

(88) $$M = \frac{k}{p(1 + p\tau_m)},$$

fonction de transfert du moteur;

n, rapport de démultiplication.

D'autre part, on désignera par :

β_1, fonction de transfert définie par le rapport

$$\beta_1 = \left(\frac{v_0}{v_e}\right)_{v_s=0};$$

Fig. 12.

Notations relatives à la boucle :

X, position du mobile;

$-X_M \leq X \leq X_M$, intervalle d'intégration;

a, raideur réduite en volt par unité de longueur;

(86) $$\lambda = 4aX_M,$$

raideur de l'arbre X en volt par tour;

(87) $$v_S = aX,$$

tension de sortie (démobulateur D_X);

$-S$, affaiblissement du séparateur S d'admittance d'entrée réelle a_3 et d'admittance de sortie nulle;

β_3, fonction de transfert d'un réseau correcteur;

β_2, fonction de transfert définie par le rapport

$$\beta_2 = \left(\frac{v_0}{v_s}\right)_{v_e=0};$$

$\beta_{03} = (\beta_3)_{p=0}$;

(89) $$\mu = \frac{1}{\Delta t} = \frac{\lambda . \beta_{02} . S . \beta_{03} . A . k}{n};$$

(90) $$T = \beta_2 \frac{\beta_3}{\beta_{03}} \frac{\mu}{p(1 + p\tau_m)},$$

fonction de transfert de la boucle;

(91) $$W_i = \frac{X}{U},$$

fonction de transfert globale de l'intégrateur.

3.2.3. Fonction de transfert globale. Relation d'échelle. — 3.2.3.1. D'après le schéma

de base (*fig.* 12) et les notations choisies, on peut écrire

$$(\beta_1 v_e - \beta_2 v_S)\,T = \beta_2 v_S,$$

d'où

(92) $$\frac{v_s}{v_e} = \frac{\beta_1}{\beta_2}\,\frac{T}{1+T}.$$

Explicitons :

1° $\frac{\beta_1}{\beta_2}$: D'après une propriété déjà utilisée, on a

(93) $$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{1}{pC_1}\,\frac{1}{R_1} = \frac{1}{p\tau_1},$$

avec

(94) $$\tau_1 = C_1 R_1.$$

2° T : D'après (90), on est amené à expliciter :

a. β_2 : On trouve

$$\beta_2 = \frac{p\tau_2}{1+p\tau_2}$$

en posant

(95) $$\begin{cases} \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{R_1} + a_3, \\ \tau_2 = R_2 C_1 ; \end{cases}$$

b. β_3 : β_3 est un réseau retard dont le rôle sera examiné ultérieurement. Sa fonction de transfert est de la forme

(95 *bis*) $$\beta_3 = \beta_{03}\,\frac{1+p\tau_a}{1+p\tau_r};$$

c. Expression de T : D'après (90), (94) et (95 *bis*), on a

(96) $$T = \mu\tau_2\,\frac{1+p\tau_a}{(1+p\tau_r)(1+p\tau_2)(1+p\tau_m)}.$$

3.2.3.2. Sans expliciter pour l'instant la fonction de transfert T de la boucle, la relation (92) devient

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{p\tau_1}\,\frac{T}{1+T}$$

en tenant compte de (84) et (87)

(97) $$W_i = \frac{X}{U} = \frac{b}{a\tau_1}\,\frac{1}{p}\,\frac{T}{1+T}.$$

Pour établir la forme définitive de W_i on considère la réponse du réseau à un échelon-vitesse

$$U = \frac{v_a}{p_2}.$$

La relation (97) donne

$$X = \frac{b}{a\tau_1}\,\frac{v_a}{p_2}\,\frac{T}{1+T}.$$

Lorsque le régime permanent est atteint, on a

$$(X)_{p\searrow 0} = \frac{b}{a\tau_1}\,\frac{v_a}{p_2}\left(\frac{T}{1+T}\right)_{p\searrow 0},$$

d'où, d'après (96),

$$(X)_{p\searrow 0} = \frac{b}{a\tau_1}\,\frac{v_a}{p^2}\,\frac{\mu\tau_2}{1+\mu\tau_2}.$$

En repassant à l'original,

(98) $$(X)_{t\nearrow\infty} = \frac{b}{a\tau_1}\,\frac{\mu\tau_2}{1+\mu\tau_2}\,v_a t.$$

On considérera deux cas :

1° On réalise par construction la relation (99), $b = a\tau_1$. Cette relation peut signifier que le réseau étudié a été précédemment utilisé en réseau dérivateur suivant le schéma de la figure 7.

La relation (98) s'écrit alors :

(99) $$X = \frac{\mu\tau_2}{1+\mu\tau_2}\,v_a t.$$

Le mouvement de l'arbre de sortie s'effectue à une vitesse inférieure à la vitesse affichée. L'erreur relative est

(100) $$\varepsilon = \frac{1}{1+\mu\tau_2} \# \frac{1}{\mu\tau_2}, \qquad \text{car} \quad \mu\tau_2 \gg 1.$$

Cette erreur peut être théoriquement rendue aussi faible qu'on veut en augmentant le facteur $\mu\tau_2$.

2° On réalise par construction la relation

(101) $$b = a\tau_1\left(1+\frac{1}{\mu\tau_2}\right).$$

Dans ce cas, la réponse (98) devient

(102) $$X = v_a t.$$

Le mouvement de l'arbre de sortie s'effectue à la vitesse affichée. La réalisation de la condition (101) suppose que le facteur $\mu\tau_2$ est stable. Il est souvent possible de donner à $\mu\tau_2$ une valeur suffisamment élevée pour qu'on puisse confondre les deux relations d'échelle (99) et (101).

Par suite, d'après les relations (97) et (99), la fonction de transfert globale s'écrit

(103) $$W_i = \frac{1}{p}\,F(p),$$

avec

(104) $$F(p) = \frac{T}{1+T}.$$

On a ainsi réalisé un intégrateur parfait suivi d'un filtre actif de fonction de transfert $F(p)$.

Comme dans tout système asservi, les conditions de stabilité portant sur l'étude de la boucle T fixeront les caractéristiques de ce filtre et aussi, d'après (96), la valeur maximum de $\mu\tau_2$ réalisable.

3.2.3.3. *Conditions de stabilité. Bande passante.* — Pour justifier le rôle du réseau retard β_3 nous envisageons les deux cas suivants :

1° $\beta_3 = 1$: La relation (96) devient

$$T(p) = \frac{\mu\tau_2}{(1+p\tau_2)(1+p\tau_m)}. \quad (105)$$

Les relations d'échelle (99) et (101) montrent déjà l'intérêt d'obtenir une valeur de $\mu\tau_2$ aussi élevée que possible. Ultérieurement cette nécessité sera encore justifiée lors de l'étude de l'influence des perturbations extérieures sur la précision d'un intégrateur.

Par construction déjà on cherchera à donner à τ_2 une valeur aussi élevée que possible.

La valeur de τ_2 est toujours de l'ordre d'une seconde. Par contre, τ_m est faible et de l'ordre de quelques millisecondes. Il résulte de ceci qu'on obtiendra une détermination suffisamment précise de la pulsation de coupure ω_c de la boucle T en prenant pour fonction de transfert l'expression asymptotique,

$$T(p) = \frac{\mu}{p(1+p\tau_m)}. \quad (106)$$

Cette fonction de transfert est celle d'un asservissement en position déjà étudié dans la première partie (§ 2.5 [2]). On a montré, en particulier, (*cf.* § 2.11.1 [2]) qu'on obtenait un amortissement convenable en prenant pour surtension Q de la fonction $|F(j\omega)|$ la valeur $Q = 1{,}3$. A cette valeur correspond un retard dynamique Δt donné par la relation

$$\Delta t = \frac{1}{\mu} \neq \frac{\tau_m}{\sqrt{2}} \quad [2]. \quad (67)$$

Un calcul direct où la courbe I [2] donne, comme pulsation de coupure,

$$\omega_c = \frac{1}{\tau_m}. \quad (107)$$

On notera que cette condition de fonctionnement correspond à une marge de phase de 45°. La valeur du paramètre $\mu\tau_2$ réalisable sans correction, avec réglage optimum du filtre $F(j\omega)$ sera donc

$$(\mu\tau_2)_{\max} = \frac{\tau_2}{\Delta t} = \sqrt{2}\,\frac{\tau_2}{\tau_m}. \quad (108)$$

Des considérations sur la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ de l'intégrateur on déduit une méthode de mesure couramment utilisée du paramètre $\mu\tau_2$.

En effet, en court-cicuitant la capacité $C_1 (C_1 = \infty)$, l'expression (105) devient l'expression (106). On mesure alors par des méthodes déjà exposées (*cf.* § 2.10.3.2 [2]) le retard dynamique $\Delta t = \frac{1}{\mu}$ de l'asservissement en position ainsi obtenu. Il suffit ensuite de mesurer ou de calculer, d'après (95), la valeur de τ_2.

On a signalé dans le précédent article [2], les divergences notables existant entre les résultats théoriques et expérimentaux de l'étude des moteurs à faible constante de temps fonctionnant à fréquence porteuse basse (50 c/s). On avait noté, en particulier, pour le moteur C. S. F. 50 c/s les résultats suivants :

$$\tau_m \simeq 4 \text{ ms}.$$

Pour $Q = 1{,}3$,

$$\Delta t \text{ théor.} = \frac{1}{365} \text{ s},$$

$$\Delta t \text{ exp.} = \frac{1}{100} \text{ s}.$$

Cette remarque est évidemment valable dans le cas d'un intégrateur utilisant des moteurs de ce type et l'on doit en tenir compte dans la relation (108).

Ainsi, avec $\tau_2 = 2$ s le $(\mu\tau_2)_{\max}$ exploitable sans correction de boucle serait

$$(\mu\tau_2)_{\max} = 200.$$

La présence des perturbations extérieures exige bien souvent une valeur supérieure. On est ainsi amené à corriger la boucle de l'intégrateur.

2° $\beta_3 = \beta_{03}\frac{1+p\tau_a}{1+p\tau_r}$: On réalise avantageusement ce réseau avec des constantes de temps τ_a et τ_r relativement élevées. Les ordres de grandeurs sont les suivants :

$$\tau_r \geq 1 \text{ s},$$

$$\tau_a \geq 0{,}1 \text{ s}.$$

Il résulte de ceci qu'on peut encore attribuer avec une approximation suffisante à l'expression complète (96) de T la pulsation de coupure ω_c définie précédemment

$$\omega_c = \frac{1}{\tau_m}.$$

La valeur correspondante réalisable de $\mu\tau_2$ sera

déterminée en écrivant, d'après (96),

$$|T(j\omega_c)| = 1,$$

soit en explicitant et simplifiant

$$\mu\tau_2 \frac{\tau_a}{\tau_r} \frac{\tau_m}{\tau_2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1,$$

d'où

$$(109) \qquad (\mu\tau_2)_{\max} = \sqrt{2}\, \frac{\tau_2}{\tau_m} \frac{\tau_r}{\tau_a}.$$

Cette relation est à rapprocher de la relation (108). En réalisant $\frac{\tau_r}{\tau_a} = 5$, on obtient ainsi avec les données de l'exemple précédent :

$$(\mu\tau_2)_{\max} = 1000.$$

Si les conditions de fonctionnement l'exigent, il est possible de réaliser des valeurs de $\mu\tau_2$ de l'ordre de 10^4.

3.2.4. Détermination des erreurs dues aux perturbations extérieures. — 3.2.4.1. Les erreurs amenées par les perturbations extérieures sur le réseau intégrateur pourront être déterminées en utilisant les résultats généraux de l'étude faite dans la première partie (§ 2.10 [2]). On avait déduit de cette étude qu'une grandeur perturbante x_n s'introduisant en un point M_n d'une boucle de servomécanisme affectait la grandeur de sortie au point M_0 d'une erreur donnée par la relation suivante :

$$(54) \qquad \varepsilon_{0n} = T_{n0} \frac{x_n}{1+T},$$

T_{n0} désignait la fonction de transfert entre M_n et M_0.

Dans le problème actuel, la grandeur de sortie est représentée par la position de l'arbre du condensateur exprimée dans le système d'unité choisi. Toutefois pour déterminer les erreurs, des considérations techniques développées ultérieurement suggèrent de prendre comme grandeur de sortie la dérivée du mouvement de l'arbre moteur. De proche en proche le long de la boucle il sera toujours possible d'en déduire l'erreur au point choisi.

3.2.4.2. Prenons comme exemple le cas d'une perturbation électrique matérialisée par un échelon de tension $x_n = \frac{E}{p}$ s'introduisant à l'entrée de l'amplificateur A (voir *fig.* 12).

Ω_m désignant la vitesse du moteur, on obtient immédiatement l'expression de T_{n0}

$$(110) \qquad T_{n0} = \frac{\Omega_m}{x_n} = \frac{kA}{1+p\tau_m}.$$

De (54) et (110), il vient

$$(111) \qquad \varepsilon_{0n} = \frac{E}{p} \frac{kA}{1+p\tau_m} \frac{1}{1+T}.$$

En régime établi, l'erreur vitesse $\Delta\Omega$ qui en résulte est

$$\Delta\Omega_m = \lim_{p \searrow 0} (p\,\varepsilon_{0n}),$$

soit, d'après les relations (111) et (96),

$$(112) \qquad \Delta\Omega_m = \frac{kAE}{1+\mu\tau_2} \# \frac{kAE}{\mu\tau_2}.$$

On notera que le terme

$$(113) \qquad \Omega_{mp} = kAE$$

représente la vitesse à laquelle tournerait le moteur si l'on ouvrait la boucle de l'intégrateur en un point extérieur à l'intervalle $M_m M_0$.

En appliquant un calcul similaire aux différentes perturbations, on obtiendrait une erreur vitesse globale mesurée sur l'arbre moteur

$$(114) \qquad \Delta\Omega_{mt} = \frac{\sum \Omega_{mp}}{\mu\tau_2}.$$

L'erreur vitesse correspondante de l'intégrateur exprimée dans le système d'unité choisi s'en déduit immédiatement

$$(115) \qquad \Delta U_t = 4 X_M \frac{\Delta\Omega_{mt}}{n}.$$

A cette erreur, il convient d'ajouter l'erreur ΔU due à la tension résiduelle du démodulateur linéaire D_l définie par la relation (85).

3.2.4.3. *Application.* — Soit les données suivantes :

— Grandeur d'entrée :

$$U_M = 500\ \text{m/s};$$
$$b = 200\ \text{V/km/s};$$
$$\Delta v_c = 0{,}05\ \text{V};$$

— Grandeur de sortie :

$$X_M = 10\ \text{km};$$
$$a = 5\ \text{V/km};$$
$$n = 200;$$
$$\sum \Omega_{mp} = 1\ \text{t/s}.$$

D'autre part, on supposera réalisée pour la boucle corrigée une valeur de $\mu\tau_2 = 1\,000$.

De ces données, on déduit : d'après (114),

$$\Delta\Omega_{mt} = 10^{-3}\,\mathrm{t/s}$$

et, d'après (115),

$$\Delta U_t = 0{,}4\,\mathrm{m/s}.$$

D'autre part, de la relation (85), on déduit

$$\Delta U = 0{,}25\,\mathrm{m/s},$$

soit une erreur totale de 0,65 m/s.

Ce résultat constitue une limite supérieure. En effet, les causes d'erreurs peuvent se classer en deux groupes principaux :

a. Des perturbations motrices parmi lesquelles on peut citer toutes les perturbations électriques : tension parasite s'introduisant en un point de la boucle, tension résiduelle du détecteur d'entrée, dérive du générateur haute fréquence de référence. Soit $\sum_m \Omega_{mp}$ la somme des vitesses parasites correspondantes.

b. Des perturbations dissipatives. Elles ont en majeure partie pour origine les couples de frottement des arbres.

Soit $\sum_d \Omega_{mp}$ la somme des vitesses parasites correspondantes. Très souvent on aura

$$\sum_m \Omega_{mp} \leq \sum_d \Omega_{mp}.$$

Il en résulte que l'intégrateur en l'absence de grandeur d'entrée conserve sa position primitive. En mouvement, l'erreur vitesse dépendra du signe de la grandeur affichée. Dans l'exemple cité l'erreur sera comprise entre 0,15 et 0,65 m/s.

3.2.4.4. *Mesure du gain de boucle.* — On a déjà donné au paragraphe 3.2.3.3 une méthode de mesure du paramètre $\mu\tau_2$.

Dans la détermination des erreurs (*cf.* § 3.2.4.2) le résultat de calcul (112) suggère une autre méthode très utilisée. En un point judicieusement choisi de la boucle ouverte de l'intégrateur, on applique un signal d'amplitude constante E suffisamment faible pour éviter la saturation des éléments de la boucle. On aura soin, en particulier, d'utiliser la partie linéaire de la courbe vitesse-tension du moteur utilisé (cf. *fig.* 3 [2]). Le moteur tourne alors à une vitesse Ω_m. On referme alors la boucle de l'intégrateur, le moteur tourne à une vitesse $\Delta\Omega_m$. Le paramètre $\mu\tau_2$ est obtenu directement

$$\mu\tau_2 = \frac{\Omega_m}{\Delta\Omega_m}.$$

L'intégrateur constituant l'élément de base des simulateurs, les résultats de cette étude seront utilisés dans celle du pilotage qu'on se propose d'étudier dans la troisième partie.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. J. Huffler, *Note sur un nouveau procédé de calcul par courants de haute fréquence* (*Ann. Radioélectr.*, juillet 1956, p. 187-189 et avril 1957, p. 140-151).

[2] R. Gendreu, *Les servomécanismes dans les calculateurs analogiques*, 1re partie (*Ann. Radioélectr.*, janvier 1957, p. 45-61).

(*A suivre.*)

C. D. U. : 621.396.962

Performances d'un radar diversité, par S. Herscovici et A. Detape.

Ann. Radioélect., nº 50, octobre 1957, p. 285-298, 6 fig.

Bien que la méthode diversité ne soit pas neuve, son application à la technique radar est récente. Elle a permis d'obtenir des améliorations importantes en ce qui concerne la portée maximum et la continuité de détection notamment. Ces améliorations peuvent être calculées en tenant compte de tous les éléments susceptibles de dégrader l'information reçue dans le cours de sa transmission. Les calculs de probabilité permettent donc d'obtenir la totalité d'information à la sortie d'un récepteur ou d'un circuit combinateur à plusieurs voies, et la méthode de Ross a paru la plus adéquate pour calculer l'incidence des caractéristiques de l'indicateur panoramique et du comportement de l'opérateur sur l'information utilisée.

C. D. U. : 621.396.65

Duplexeur à large bande pour aériens sur ondes décimétriques, par P. Bouvier.

Ann. Radioélect., nº 50, octobre 1957, p. 315-329, 23 fig.

Après un exposé des avantages d'ordre tactique apportés par l'emploi d'un duplexeur d'aérien aux liaisons hertziennes multiplex à usage militaire, l'auteur définit les qualités exigibles d'un tel appareillage du point de vue de la commodité d'exploitation et des performances électriques.

Un duplexeur à large bande étudié par la Société Française Radioélectrique, à la demande du Service Technique des Télécommunications de l'Air est ensuite décrit. Ce duplexeur, constitué par des filtres passe-haut et passe-bas, ne nécessite pas de réglage dans la gamme d'utilisation. Quelques résultats expérimentaux sont présentés ainsi que des calculs effectués au cours de l'étude. Il est fait notamment une évaluation des tolérances de fabrication propre à assurer une bonne reproductibilité de construction.

C. D. U. : 621.391 : 621.396.4

L'aspect physique de la théorie de l'Information. Application au choix des liaisons multiplex et en télévision, par J. Ortusi.

Ann. Radioélect., nº 50, octobre 1957, p. 299-314, 7 fig.

L'auteur expose d'abord la nécessité, due à l'importance accrue de l'Information dans la vie moderne, d'inclure la notion d'Information dans un cadre scientifique par une limitation précise du terme. Il souligne les avantages et les inconvénients d'une notion purement statistique de l'Information. Après avoir rappelé les définitions introduites dans la théorie (quantité d'Information, redondance, codage, etc.), l'auteur analyse les deux classes d'Information, distinguées récemment par Léon Brillouin : l'Information liée aux complexions particulaires d'un système physique et l'Information libre où le facteur humain entre en considération.

Après quelques réflexions sur une possibilité de synthèse entre ces deux classes d'Information, l'auteur introduit la notion de « vitesse d'Information utilisable.

Une application importante de la théorie est faite au cas de l'Information transmise par liaisons téléphoniques multiplex et par télévision.

C. D. U. : 621.396.677.7/.8

Complément à l'étude des antennes à double courbure, par A. Boudigues.

Ann. Radioélect., nº 50, octobre 1957, p. 330-336, 4 fig.

L'article décrit un procédé de calcul du réflecteur d'une antenne à double courbure à partir de la connaissance de la courbe centrale en C (ou en S). Après quelques exemples d'application, une brève discussion examine la validité pratique du calcul.

U. D. C. : 621.391 : 621.396.4

The physical aspect of Information theory. Application to the choice of multiplex connections and to television, by J. Ortusi.

Ann. Radioélect., Nr. 50, October 1957, p. 299-314, 7 fig.

The author first shows the necessity, due to the enhanced importance of Information in modern times, of including for scientific purposes, the notion of Information by a precise definition of that expression. He stresses the advantages and disadvantages of a purely statistical notion of Information. Having recalled the definitions introduced in the theory (quantity of Information, redundancy, coding, etc.), the author analyses the two classes of Information, recently distinguished by Leon Brillouin : Bound Information related to particular complexions of a physical system, and Free Information where the human factor comes into consideration. After a few remarks on the possibility of a synthesis between these two classes of Information, the author introduces the notion of « Rate of usable Information ». An important application of the theory is the case of Information transmitted by multiplex telephone links and by television.

U. D. C. : 621.396.677.7/.8

Complement to the study of double curvature aerials, by A. Boudigues.

Ann. Radioélect., Nr. 50, October 1957, p. 330-336, 4 fig.

The article describes a method of calculating the reflector of a double curvature aerial from a knowledge of the central curve at C (or at S). After a few examples of application, the validity of the calculation in practical cases is briefly discussed.

U. D. C. : 621.396.962

The performance of a diversity radar, by S. Herscovici and A. Detape.

Ann. Radioélect., Nr. 50, October 1957, p. 285-298, 6 fig.

Although the diversity method is not new, its application to radar is of recent date. It has brought about important improvements in maximum range and, in particular, to the continuity of detection.

These improvements can be calculated, taking into account all elements liable to degrade the received information in the course of its transmission.

Probability calculations enable the whole of the information at the output of a receiver or of a multi-channel combiner circuit to be obtained, and Ross's method has been thought the most adequate for calculating the influence of the characteristics of the PPI display and of the consequential actions of the operator on the data used.

U. D. C. : 621.396.65

Wide-band duplexer for decimetric aerials, by P. Bouvier.

Ann. Radioélect., Nr. 50, October 1957, p. 315-329, 23 fig.

Having set out the tactical advantages arising from the use of an aerial duplexer to multiplex radio links for military use, the author defines the qualities which such an equipment must possess from the point of view of ease of operation and of electrical performance.

A wide-band duplexer developed by the Société Française Radioélectrique, at the request of the Air Telecommunications Technical Service, is then described. This duplexer, consisting of high-pass and low-pass filters, requires no adjustement in the utilisation band. Some experimental results are given, together with calculations made in the course of the study. In particular, production tolerances appropriate for good reproductibility are evaluated.

C. D. U. : 621.318.12

Les ferrites, par A. Vassiliev (deuxième partie).

Ann. Radioélect., n° 50, octobre 1957, p. 337-362, 47 fig.

La première partie de cet article avait été surtout consacrée au rappel des éléments de base du ferromagnétisme et à une étude sommaire de la théorie du ferrimagnétisme. Dans cette deuxième partie, l'auteur adopte un point de vue plus utilitaire et étudie les propriétés techniques des ferrites, les propriétés particulières de principaux groupes de compositions, puis décrit quelques cas d'emplois typiques.

C. D. U. : 621-526 : 681-142

Les servomécanismes dans les calculateurs analogiques, par R. Gendreu (deuxième partie).

Ann. Radioélect., n° 50, octobre 1957, p. 363-381, 12 fig.

Dans la première partie, l'auteur avait donné les notions nécessaires pour déterminer la contribution des servomécanismes à la précision du calcul.

Dans cette deuxième partie, après un aperçu du domaine d'application du servomécanisme, dans le calculateur haute fréquence C. S. F., il utilise ces résultats pour déterminer les performances obtenues dans les deux opérations analytiques : dérivation et intégration.

La première étude est faite en s'appuyant sur un problème de tir contre avion.

U. D. C. : 621-526 : 681-142

Servomechanism in analog computers, by R. GENDREU (Second part).

Ann. Radioélect., Nr. 50, October 1957, p. 363-381, 12 fig.

In part I, the author has set down the necessary elements for determining the contribution of servomechanisms to the accuracy of calculations.

In part II, after sketching out the field of application of a servomechanism in the C. S. F. high-frequency computer, the author uses these results to determine the performance obtained in the two analytic operations : differentiation and integration.

For the first investigation an anti-aircraft gunnery problem is considered.

U. D. C. : 621.318.12

Ferrites, by A. VASSILIEV (Second part).

Ann. Radioélect., Nr. 50, October, p. 337-362, 47 fig.

The first part of this paper had mainly been concerned with recalling the basic elements of ferromagnetism and with a brief examination of the theory of ferrimagnetism. In this second part the author adopts a more utilitarian point of view and examines the technical properties of ferrites, the special properties of main composition groups and goes on to describe a few typical examples of applications.

SOMMAIRE

Imp. GAUTHIER - VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS
150620
Dépôt légal, Imprimeur, 1957, n° 1183

Gérant : L. P. BOULANGER.